



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Filipe de Carvalho Pedrosa

Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto

Campinas
2018

Filipe de Carvalho Pedrosa

Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, na Área de Telecomunicações e Telemática.

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO FILIPE DE CARVALHO PEDROSA E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOÃO BOSCO RIBEIRO DO VAL.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FAPESP, 2016/13508-0

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8509-8809>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

P343m Pedrosa, Filipe de Carvalho, 1988-
Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto / Filipe de
Carvalho Pedrosa. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade
de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Processo estocástico. 2. Sistemas incertos. 3. Programação dinâmica. I.
Val, João Bosco Ribeiro do, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Modeling and control of discrete time CVIU systems

Palavras-chave em inglês:

Stochastic control theory

Uncertain systems

Dynamic programming

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora:

João Bosco Ribeiro do Val [Orientador]

Marcos Garcia Todorov

Alim Pedro de Castro Gonçalves

Data de defesa: 24-05-2018

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA — DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Candidato: Filipe de Carvalho Pedrosa

RA: 163880

Data da Defesa: 24/05/2018

Título da Dissertação/Tese: “Modelagem e controle de sistemas CVIU a tempo discreto”

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (presidente, FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Marcos Garcia Todorov (COMAC/LNCC)

Prof. Dr. Alim Pedro de Castro Gonçalves (FEEC/UNICAMP)

A ata de defesa, com as respectivas assinaturas dos membros da Comissão Julgadora, encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

À memória de minha avó Conceição de Faria Gurgel.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Dr. João Bosco Ribeiro do Val pela oportunidade a mim concedida, pelo acompanhamento e habilidosa orientação ao longo do mestrado. Seu olhar crítico e vasta experiência são responsáveis por incutir em seus orientados um apreço pelo rigor, o que certamente contribuiu para o meu crescimento nestes últimos dois anos.

Aos membros da banca examinadora por aceitarem o convite para participar da defesa, bem como pelas sugestões que seguramente contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À minha família, em especial meu pai Rosélio Cândido, minha mãe Ita de Lourdes e minha irmã Flávia pelo incentivo perene.

To my dearest one, my girlfriend Bao Lee, for being my backbone. Always so loving and caring! I am thankful for having found in you someone whom I can rely on as my support system in times of distress and, most especially, someone to make memorable moments with.

Aos amigos do LE-16 por proporcionarem um ambiente de trabalho agradável e colaborativo no laboratório. Pelas mais variadas prosas e causos na hora do café que, não raramente, proporcionaram oportuno entretenimento além de discussões acaloradas e enriquecedoras.

Aos servidores da Unicamp e terceirizados que, tão solícitamente me atenderam em diversas ocasiões.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo financiamento do meu projeto de pesquisa (processo nº 2016/13508-0).

“Certainly some gap between theory and application should be maintained, for without it there would be no progress... It appears that the problem of the gap is a control problem in itself; it must be properly identified and optimized through proper action”
(Axelby, George S.)

Resumo

Esta dissertação de mestrado ocupa-se em estudar o paradigma de controle ótimo para sistemas estocásticos a tempo discreto cujas dinâmicas são pouco conhecidas e impossíveis de serem completamente determinadas. Para este fim, introduz-se o princípio CVIU (*Control Variation Increases Uncertainty*) a partir do qual as políticas de controle são derivadas apropriadamente. O modelo CVIU vem bem a calhar particularmente em situações onde modelos dinâmicos não estão completamente disponíveis e, além disso, o emprego de técnicas de identificação de sistemas é proibitivo. Por conseguinte, dispõe-se apenas de um modelo grosseiro para a síntese de controladores. A ideia por trás da abordagem CVIU é desenvolvida a partir do conhecimento local do comportamento dinâmico dos sistemas em torno de um ponto fixo e uma maneira alternativa de contabilizar as incertezas inerentes aos modelos. Características interessantes emergem da solução do problema de controle. Por exemplo, a existência de uma região delimitada no espaço de estados dentro da qual a ação ótima de controle é de não variação, a chamada região de inação. Esta característica, peculiar da abordagem CVIU, apresenta laços com políticas de controle cautelosas com ocorrências em aplicações no contexto econômico. O problema de controle em horizonte infinito com custo quadrático descontado admite solução em forma fechada dentro da inação, dada por uma equação de Lyapunov linearmente perturbada, e soluções assintóticas em regiões distantes da origem dadas por uma equação racional de Riccati. A solução completa do problema é composta por uma parte analítica e outra numérica, a ser considerada nas regiões intermediárias que se estendem da inação às regiões assintóticas no infinito. Exploram-se também, condições de existência e métodos para a solução dessas equações algébricas e que são de extrema importância na construção da solução do problema de controle CVIU. Ainda, como última contribuição deste trabalho, analisa-se brevemente a estabilidade estocástica para o modelo CVIU controlado. No desfecho deste trabalho, três experimentos numéricos ilustram aplicações de controladores CVIU em diferentes cenários. Primeiramente, adota-se uma política CVIU em um problema de exploração ótima em piscicultura. Num segundo momento, propõe-se uma comparação entre os custos médios incorridos pela aplicação das políticas CVIU e LQG em um sistema estocástico incerto com descasamento de parâmetros. Este experimento aponta para situações onde o emprego da política CVIU mostra-se mais vantajosa que aquela obtida do célebre regulador LQG. Por fim, apresenta-se um exemplo de um sistema CVIU bidimensional no controle através do qual interessantes peculiaridades da técnica se fazem perceptíveis visualmente.

Palavras-chaves: Controle estocástico ótimo; Sistemas incertos; Programação dinâmica.

Abstract

This master's thesis deals with the paradigm of optimal control for stochastic systems whose dynamics are poorly known and impossible to be fully determined. To this end, we introduce the CVIU principle (Control Variation Increases Uncertainty) and devise the controls accordingly. The CVIU model comes in handy particularly in situations where a full dynamic model is not available and the employment of systems identification techniques is prohibitive. Consequently, only a rough model is available for control design. The conception of the CVIU approach is developed from the standpoint of one moderately known equilibrium point and an alternative way to account for the inherent model uncertainties. Interesting solution characteristics emerge from the optimal control problem. For instance, the existence of a delimited region on the state space within which the optimal control action is to remain idle - the so called inaction region. This feature, peculiar to the CVIU approach, has ties to cautionary control policies with occurrences in the context of economics. The infinite horizon, α -discounted control problem with quadratic cost function admits solutions in closed form inside the inaction region, given by a linearly perturbed Lyapunov equation, and asymptotically in far-off regions by a rational Riccati equation. The complete solution is comprised of an analytical part and a numerical one, to be considered in the intermediate regions stretching from the inaction region to the asymptotic ones in the infinity. Additionally, existence conditions and solution methods for these algebraic equations are explored as they are of utmost importance when deriving the solution to the CVIU control problem. Moreover, as a last contribution of this work, a stochastic stability analysis is carried out for the CVIU controlled model. In the final chapter of this manuscript, three numerical experiments illustrate the application of the CVIU controller in distinct scenarios. Firstly, a CVIU control policy is applied in an optimal fish harvesting problem. In a second moment, the experiment proposes a comparison between the average incurred costs associated to the CVIU and LQG policies for an uncertain system with mismatched parameters. This experiment points to case scenarios where the use of the CVIU policy is more advantageous than that of the LQG regulator. At last, an example of a two-dimensional CVIU system in the states and control is brought about and interesting features of the technique become visually perceptible.

Keywords: Stochastic Optimal Control; Uncertain Systems; Dynamic Programming.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Configuração do controle ótimo CVIU	63
Figura 2 – Controle CVIU e trajetórias para o sistema não linear (5.1)	64
Figura 3 – Mapa do controle CVIU ótimo e região \mathcal{R}^0 destacada em azul	66
Figura 4 – Ganho de performance relativo CVIU vs LQG para $\delta = 0.37$	67
Figura 5 – Custo e controles CVIU ótimos para o sistema bidimensional	70

Lista de tabelas

Tabela 1 – Ganho de desempenho relativo para distintos casos de descasamento de parâmetros	67
---	----

Lista de símbolos

\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano n -dimensional
$\overline{\mathbb{R}}$	Reta real estendida
$\ \cdot\ $	Norma Euclidiana de vetores
$ \cdot $	Valor absoluto de cada entrada de um vetor
$\langle x, y \rangle$	Produto interno entre vetores x, y
A^\top	Transposta da matriz A
A_i	i -ésima coluna de A
x_i	i -ésima entrada do vetor x
$\text{tr}(A)$	Traço da matriz A
$r(A)$	Raio espectral da matriz A
$\sigma(A)$	Espectro da matriz A
$A^\top B(\bullet)$	Forma quadrática $A^\top B A$
$S^{\ell+}$	Espaço das matrizes semidefinidas positivas
$S_0^{\ell+}$	Espaço das matrizes definidas positivas
∂	Operador subdiferencial
$\text{epi}f$	Epígrafe de f
$\text{dom}f$	Domínio de f
$f \circ g$	Função composta de f com g , também denotada $f(g(x))$
∂_{x_i}	i -ésima entrada do vetor subgradiente em relação a x
$\mathcal{S}(\cdot)$	Vetor de conjuntos subdiferenciais
$\text{co}\{\cdot\}$	Fecho convexo de um conjunto
$E\{\cdot\}$	Esperança matemática
π^*	Política de controle ótima
$u^*(\cdot)$	Entrada de controle ótima

J_k^*	Custo incorrido a partir do instante k
J_0^*	Custo ótimo ou valor do problema
α	Fator de desconto
\mathcal{R}_i	i -ésima região no espaço de estados
$\mathcal{R}(X)$	Operador racional de Riccati
$D(\mathcal{R})$	Domínio do operador de Riccati
q.c.	quase certamente
sse	Se, e somente se

Sumário

Lista de ilustrações	10
Lista de tabelas	11
Lista de abreviaturas e siglas	12
Lista de símbolos	12
Sumário	14
1 Introdução	16
1.1 Tomada de decisão sob incerteza	16
1.1.1 Oncologia	17
1.1.2 Biologia Sintética	17
1.2 O problema geral	18
1.2.1 Contextualização CVIU	19
1.2.2 Principal contribuição do modelo CVIU	19
1.3 Publicações resultantes do trabalho	20
1.4 Estrutura da dissertação	21
2 Tópicos preliminares	22
2.1 Notações	22
2.2 Álgebra linear	22
2.3 Análise de funções convexas	24
2.4 Análise de funções não suaves	25
2.5 Controle ótimo	26
2.6 Solução de Riccati e Lyapunov generalizadas	28
2.6.1 Método iterativo tipo Newton-Kantorovich	31
2.6.1.1 Convergência do método	32
3 Construção do modelo	34
3.1 O modelo CVIU	34
3.1.1 Considerações a respeito do modelo CVIU	35
4 Síntese do controlador CVIU	37
4.1 O problema de controle estocástico ótimo para o modelo CVIU	37
4.1.1 Convexidade da Função Valor	38
4.1.2 A região de inação	43
4.2 Horizonte infinito e custo quadrático descontado	44
4.2.1 Solução dentro da região de inação	45
4.2.2 Soluções assintóticas	49
4.3 Existência, unicidade e estabilizabilidade das soluções	53
4.3.1 Um segundo método iterativo	55

4.4	Estabilidade estocástica das soluções	56
5	Experimentos numéricos	59
5.1	Composição da solução	59
5.1.1	Solução numérica subótima	59
5.2	Abordagem CVIU aplicada ao problema de pesca	60
5.3	Controle CVIU <i>versus</i> LQG	65
5.4	Um sistema CVIU bidimensional no controle	68
	Conclusão e perspectivas futuras	71
	Referências	74

1 Introdução

Incerteza e seus conceitos correlatos tais quais risco, volatilidade e ambiguidade são partes indissociáveis do mundo. Albert Einstein, referindo-se a esta premissa no que diz respeito a descrição matemática de objetos da realidade, reconhece:

“Na medida em que as proposições da matemática se referem à realidade, elas não são certas; na medida em que são certas, elas não se referem à realidade” (EINSTEIN, 1954).

Nesta conjectura, Einstein não descreve que proposições matemáticas sejam por si só inexatas, mas que tais proposições baseiam-se em abstrações que descrevem a realidade. Não obstante, essas abstrações não representam a realidade certamente, pois derivam-se do conhecimento humano incompleto do mundo.

1.1 Tomada de decisão sob incerteza

Ubíqua em toda e qualquer conjuntura realista, a incerteza constitui-se como o principal empecilho para a tomada de decisão de forma eficaz. Deveras, considerável esforço tem sido empregado ao longo dos anos pela comunidade científica a fim de estudar maneiras de melhor lidar com a incerteza em diversas áreas da ciência. Frutos deste esforço, copiosas aplicações podem ser encontradas em áreas como teoria da decisão (BERGER, 2013), otimização estocástica (HEYMAN; SOBEL, 1982), otimização robusta (BERTSIMAS *et al.*, 2011), controle adaptativo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013), planejamento e alocação dinâmica de recursos (LAVALLE, 2006), neurociências (YOSHIDA; ISHII, 2006) dentre outros.

No que tange a Teoria de Controle, novas direções estão surgindo devido sua relevância e potencial para resolver problemas de grande interesse social em áreas como saúde e medicina, energia e clima, desigualdade e crescimento econômico, etc (LAMNABHI-LAGARRIGUE *et al.*, 2017). Estas aplicações apresentam-se como motivação para este trabalho, uma vez que resultam em situações onde o processo de tomada de decisão se dá em ambientes complexos, não lineares e suscetíveis a consideráveis níveis de incerteza.

A título de ilustração, apresentam-se a seguir duas instâncias onde o processo decisório não se dá sem a ausência de expressivo grau de incerteza e/ou risco. Ainda assim, devido ao grande apelo e relevância em suas respectivas áreas, o estudo da tomada de decisão para estes problemas é de grande interesse.

1.1.1 Oncologia

Com o intuito de definir uma política ótima para administração de drogas quimioterápicas para pacientes cancerosos, considere o problema de modelagem da progressão de uma massa tumoral e sua resposta a tratamentos anticancerígenos (ARAÚJO; MCELWAIN, 2004; FASANO *et al.*, 2006). Uma vasta gama de diferentes abordagens encontradas na literatura somente atestam a incrível complexidade dos processos biológicos e fisiológicos inerentes ao crescimento tumoral, invasão e metástase a nível molecular, celular e macroscópico.

Este problema é particularmente intrincado, pois o modelo deve dar conta das diversas cinéticas de estímulos de criação de vasculatura (angiogênese), processo de invasão, metástase e competição por nutrientes por parte de células tumorigênicas heterogêneas. Além disso, a política de administração quimioterápica deve cobrir diferentes combinações de drogas (mono/poliquimioterapia), evitar a indução de resistência por parte das células e também a possibilidade de intoxicação do paciente por quimioterapia.

1.1.2 Biologia Sintética

O processo de regulação gênica para metabolismo da lactose em bactérias *Escherichia Coli* é um caso de controle por realimentação positiva que ocorre naturalmente em redes regulatórias de genes. Em biologia sintética, o *operon lac*¹ é frequentemente empregado como um comutador para controlar genes em sistemas biológicos geneticamente projetados.

Para o funcionamento do operon, é necessário que haja falta de glicose (monossacarídeo) no meio extracelular e a presença de lactose (dissacarídeo junção de glicose e galactose). Quando há a presença de glicose, a bactéria não necessita gastar energia na degradação de um dissacarídeo (lactose), visto que há disponibilidade de fonte de energia de mais fácil digestão (glicose). Para tal fim, essas bactérias contam com um controle biológico natural denominado diauxia. Esse controle é viabilizado por uma proteína ativadora que inicia a produção de enzimas no caso de ausência de glicose no meio e um repressor que paralisa a produção de enzimas na ausência de lactose. Esse mecanismo permite que a glicose sempre seja metabolizada pelas bactérias antes da lactose.

Em vista disso, suponha que se tenha interesse em controlar uma certa cultura dessas bactérias induzindo-as a um determinado estado por vias da manipulação da concentração química do ambiente (JULIUS *et al.*, 2008). Embora a breve introdução acima possa parecer simples, comportamentos de histerese e biestabilidade são conhecidos e observados experimentalmente para essas populações (NOVICK; WEINER, 1957).

¹ É um grupo de genes que controlam de maneira coordenada o transporte e metabolismo de lactose em *E. Coli*. Estes genes transcrevem uma molécula de RNAm que, por sua vez, codifica proteínas enzimáticas relacionadas ao processo metabólico de lactose.

Isto é, as células podem estar totalmente induzidas, com produção máxima de enzimas, ou não-induzidas, com produção irrisória. Além disso, há ainda flutuações estocásticas, característica de processos biomoleculares, no qual moléculas escapam espontaneamente e transitam entre os estados de equilíbrio.

Ademais, devido à transições estocásticas entre os estados de equilíbrio, uma cultura de *E. Coli* não exhibe verdadeiramente biestabilidade; Em vez disso, as duas populações eventualmente se equilibram, o que leva a um único estado estável (a nível da cultura) para qualquer nível de lactose no meio extracelular. Esta característica torna ainda mais difícil a obtenção de modelos, e por conseguinte a derivação de políticas de controle, que sejam consistentes com a dinâmica tanto no nível celular quanto no nível macroscópico.

1.2 O problema geral

No que diz respeito a Teoria de Controle, a obtenção de um modelo matemático que represente o sistema de interesse é de vital importância para o projeto de controladores. A propósito, a maioria das técnicas existentes para síntese de controladores implicitamente assumem que modelos de razoável acurácia podem ser obtidos (ZHENG *et al.*, 2007). Acontece que a vasta maioria das aplicações no mundo real não apenas apresentam não linearidades e/ou são variantes no tempo, mas também são altamente incertas (YOUCEF-TOUMI; ITO, 1988). Não raramente, em muitas situações práticas, sistemas operam em ambientes onde grandes distúrbios e variações de parâmetros ocorrem de maneira fortuita. Desse modo, nem sempre é possível obter um modelo que represente o sistema de interesse com alguma precisão e que, ao mesmo tempo, seja livre de consideráveis incertezas paramétricas ou estruturais.

Motivados por esse paradigma, inúmeros trabalhos alusivos ao problema de controle em ambientes incertos permeiam a literatura. Controle robusto (ZHOU; DOYLE, 1998), controle adaptativo (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 2013) e controle por modos deslizantes (KHALIL; GRIZZLE, 2002) são, por exemplo, técnicas celebradas para lidar com sistemas incertos quando se trata de estratégias de controle baseadas em modelos. Em contrapartida, outras abordagens buscam se desvencilhar do conhecimento da dinâmica do sistema por intermédio de estratégias de controles livres de modelos. Ocorrências destas envolvem aprendizagem por reforço (HAGEN; KRÖSE, 1998), controle inteligente (FLIESS; JOIN, 2013), controle baseado em dados (BAZANELLA *et al.*, 2011), programação dinâmica aproximada e algoritmos de iteração de políticas (WATKINS, 1989; SI, 2004; BERTSEKAS; TSITSIKLIS, 1996). Contudo, muitas dessas estratégias demandam uma quantidade substancial de dados para serem implementadas, o que pode ser uma restrição importante quando se tratam de aplicações envolvendo sistemas com dinâmicas subdeterminadas.

1.2.1 Contextualização CVIU

Considere um dado sistema dinâmico de interesse onde o tomador de decisão dispõe de observação completa dos estados a cada instante de tempo. Entretanto, suponha que não se tenha acesso a um modelo matemático que descreva adequadamente o comportamento dinâmico deste sistema. Admita também que, assim como o foram para os exemplos 1.1.1 e 1.1.2, a submissão deste mesmo sistema à técnicas de identificação é inexequível. Esta dificuldade pode decorrer da impossibilidade de submeter o sistema à experimentações, incompletude de dados devido à limitações de período e locais de amostra, número de vezes que o experimento pode ser repetido, além de restrições experimentais e/ou biológicas incorridas pela utilização das técnicas de aquisição de dados.

Nesta conjuntura, a derivação de um modelo baseará tão somente em alguns poucos dados históricos de pequeno valor estatístico que oferecem pouca informação sobre uma quantidade limitada de estados e controles (VAL; SOUTO, 2017). Desta limitação resulta que modelos obtidos apresentam validade restrita a uma região delimitada dos estados e do controle. Além disso, estes apresentam incertezas consideráveis em suas estruturas e que refletem a insciência humana sobre a dinâmica real dos sistemas, seja por imprecisão nos parâmetros, não-linearidades ou quaisquer outras dinâmicas não determinadas.

Posto que o conhecimento da real dinâmica está restrito a uma vizinhança dos pontos de operação, variações na política de controle aumentam a incerteza sobre o sistema, porquanto tendem a conduzir o estado para regiões onde o modelo incerto disponível perde validade. À vista disso, as magnitudes das variações do estado e da política de controle passam a serem vistas como contribuintes para o aumento da incerteza sobre o sistema. À esta classe de sistemas com dinâmicas subdeterminadas passa-se a referir, doravante, como sistemas CVIU (*Control Variation Increases Uncertainty*).

1.2.2 Principal contribuição do modelo CVIU

Este trabalho constitui-se uma extensão para o caso discreto do trabalho (VAL; SOUTO, 2017) relativo a sistemas contínuos. Portanto, o ponto focal deste manuscrito reside em prover uma estrutura matemática abrangente a fim de lidar com o problema de controle ótimo para sistemas a tempo discreto cujas dinâmicas sejam pouco conhecidas. Para tal, apresentam-se ferramentas necessárias para a síntese de controladores que sejam tolerantes a grandes níveis de incerteza. Partindo-se de um ponto de equilíbrio moderadamente conhecido, propõe-se um novo modelo estocástico para tratar o problema de controle de sistemas afetados por incertezas paramétricas e/ou estruturais. Em função disso, a abordagem CVIU pode ser tida como uma alternativa à análise de pior caso, costumeira em controle robusto.

Além disso, pode-se inferir que, em face de incerteza, a abordagem CVIU

outorga mais flexibilidade ao tomador de decisão que aquela referente ao controlador robusto de ganho estático. Esta asserção pode ser feita porque a política de controle CVIU é definida por partes no espaço de estados, ao passo que a política robusta tem forma linear. Desse modo, a abordagem CVIU é capaz de fornecer estratégias de controle diferenciadas para distintos regimes de operação, o que não ocorre com a lei de controle robusta de ganho fixo.

Outrossim, destaca-se de forma prenunciada que a característica mais notável da abordagem CVIU é a existência de uma região no espaço de estados onde a política ótima é a de não variação. Este fato sela a conexão entre a incerteza intrínseca originada da imprecisão do modelo adotado e o caráter cauteloso do tomador de decisão. A concepção de controle cauteloso foi proposta e tem sido amplamente debatida no contexto da economia há vários anos. O trabalho seminal (BRAINARD, 1967) sugere que incertezas paramétricas sobre um modelo devem justificar o uso de políticas mais cautelosas. Nessa mesma linha, (BLINDER, 1999) preconiza que tomadores de decisão devem computar a correção ótima de seus instrumentos econômicos como se conhecessem seus modelos econométricos certamente para, então, usá-la como base para a determinação de uma correção mais conservadora. Este comportamento manifestamente corrobora parcimônia. Um epítome do que se caracteriza controle cauteloso pode ser encontrado em (GIANNONI, 2002) quando este menciona que se há o desejo de tomar o devido cuidado com a incerteza inerente ao modelo, então devem-se justificar respostas mais gentis, possivelmente próximas às políticas vigentes.

Por fim, vale pontuar que o caráter cauteloso dos controladores CVIU resulta naturalmente da solução do problema de controle ótimo associado ao modelo CVIU. Por outro lado, os controladores robustos não são propensos a apresentar precaução em suas políticas. Verdade seja dita, é deveras improvável que tal comportamento manifeste-se nesta abordagem (SOUTO, 2015).

1.3 Publicações resultantes do trabalho

As publicações que resultaram do desenvolvimento deste trabalho incluem um artigo apresentado em congresso internacional e um segundo trabalho submetido a periódico internacional.

1. Pedrosa, F. C.; dos Santos, J. C. N.; do Val, J. B. R. Stochastic Optimal Control of Systems for which Control Variation Increases Uncertainty: A Contribution to the Discrete Time Case. *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. Banff, Alberta, Canada, 2017, pp. 2279-2284.
2. Pedrosa, F. C.; dos Santos, J. C. N.; do Val, J. B. R. Modeling & Control of Stochastic Discrete Time CVIU Systems. *Periódico internacional, (em preparação)*.

1.4 Estrutura da dissertação

Os capítulos constituintes desta dissertação estão agrupados em duas grandes partes, a saber. A primeira, de caráter preliminar, tem importância didática e apresenta no Capítulo 2 as notações e fundamentos matemáticos que serão utilizados ao longo do texto. A segunda parte, composta pelos Capítulos 3, 4, 5 e 6, apresenta as contribuições deste trabalho. O conteúdo de cada capítulo é individualmente resumido a seguir.

Capítulo 2: Apresenta um compilado de definições, proposições e teoremas que foram incluídos neste trabalho para torná-lo auto contido, bem como facilitar o entendimento por parte do leitor, servindo como referência imediata caso necessário.

Capítulo 3: Apresenta uma argumentação lógica sobre o contexto no qual os sistemas CVIU estão inseridos utilizando-o para a construção de um modelo que visa representar sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida e que é consistente com o princípio CVIU.

Capítulo 4: Propõe inicialmente o problema de controle ótimo para o modelo CVIU. Neste cenário, propriedades fundamentais da abordagem CVIU são exploradas. Estas incluem a caracterização da convexidade da Função Valor além da divisão do espaço de estados em regiões onde todas as entradas do vetor de controle ótimo tem sinal conhecido. Em um segundo momento, investiga-se o problema de controle ótimo em horizonte infinito com custo quadrático descontado. Neste contexto, desenvolvem-se analiticamente soluções ótimas estacionárias em forma fechada e que são válidas no interior da região de inação global e nas regiões assintóticas. Também são abordadas condições de existência e algoritmos para solução das equações de Lyapunov e Riccati que emergem da abordagem CVIU. Por fim, uma análise da estabilidade estocástica para a sistemas CVIU controlados em horizonte infinito fecha este capítulo.

Capítulo 5: Este capítulo propõe uma composição numérica para solução completa do problema de controle ótimo CVIU. Em um primeiro momento, estuda-se uma aproximação subótima para o caso de um sistema CVIU monoentrada. A seguir, aborda-se o caso mais complexo onde o controle CVIU é multidimensional. De posse destas soluções, parte numérica e parte analítica, exploram-se exemplos numéricos com fins de mostrar experimentalmente as nuances da abordagem CVIU.

Capítulo 6: Conclui o trabalho ao estacar uma última vez as principais características da abordagem CVIU e indica algumas perspectivas para trabalhos futuros.

2 Tópicos preliminares

O propósito deste capítulo é o de apresentar as notações matemáticas, bem como conceitos, definições e resultados estabelecidos que serão de grande valia durante o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Notações

Nesta dissertação, \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ e \mathbb{R}^n representam o conjunto dos números reais, o conjunto dos reais não negativos e o espaço Euclidiano n -dimensional respectivamente. A norma Euclidiana de vetores é representada por barras duplas verticais $\|\cdot\|$, enquanto que para algum vetor $y \in \mathbb{R}^\ell$, define-se $|y| = [|y_1| \ |y_2| \ \dots \ |y_\ell|]^\top$. A forma quadrática e simétrica $A^\top B A$ é, por conveniência, escrita como $A^\top B(\bullet)$. A representação do produto interno de dois vetores $y, t \in \mathbb{R}^\ell$ é feita por $\langle y, t \rangle$. Ainda, o conjunto de matrizes reais $m \times n$ é denotado por $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, A^\top é a transposta de A , $\text{tr}(A)$ é o traço de A , $A \succeq 0$ deve ser entendido no sentido de positividade de matrizes. Denotam-se os espaços das matrizes simétricas $S^\ell = \{A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell} : A = A^\top\}$, $S^{\ell+} = \{A \in S^\ell : A \succeq 0\}$ e $S_0^{\ell+} = \{A \in S^{\ell+} : A \succ 0\}$. Por vezes, refere-se à i -ésima coluna da matriz A por A_i e, de modo análogo, à i -ésima entrada do vetor y por y_i . Ademais, defina $\text{diag} : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ tal que, dado um vetor $y \in \mathbb{R}^\ell$, $\text{diag}(y)$ é a matriz diagonal formada ao fazer do vetor y sua diagonal principal. Sem ambiguidade, defina também $\text{Diag}(A) : \mathbb{R}^{\ell \times \ell} \rightarrow \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ onde, dado $A \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $\text{Diag}(A)$ é a matriz diagonal obtida ao conservar os elementos da diagonal principal de A e descartar os demais. Por fim, o conjunto de todos os subgradientes de uma função f em x é o mapa multivalorado (subdiferencial) $\partial f : x \rightarrow \partial(x)$ e é denotado por $\partial f(x)$.

2.2 Álgebra linear

No decorrer deste trabalho, utilizam-se letras maiúsculas (A, B, C, \dots) para denotar matrizes de modo que $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ representa uma matriz de $n \times m$ entradas reais contando com n linhas e m colunas. A notação $[A]_{ij}$ refere-se à entrada correspondente a i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Definição 2.1. (MEYER, 2000, pg. 83) Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, sua **transposta** é obtida ao promover o intercâmbio entre linhas e colunas de A . Mais precisamente, se

$$A = [a]_{ij}, \quad \text{então} \quad [A^\top]_{ij} = [a]_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

Deve ficar evidente que, para toda matriz, $(A^\top)^\top = A$.

Definição 2.2. (MEYER, 2000, pg. 85) Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada. A matriz A é dita **simétrica** sempre que $A = A^T$, isto é, quando $a_{ij} = a_{ji}$.

Definição 2.3. (MEYER, 2000, pg. 566) Para matrizes simétricas de entradas reais tais que $\text{rank}(A) = r$, as seguintes afirmações são equivalentes, de modo que qualquer delas pode ser usada como definição de matrizes **semidefinidas positivas**.

- $x^T A x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$;
- Todos autovalores de A são não negativos;
- $A = B^T B$ para algum B com $\text{rank}(B) = r$;
- Todos os menores principais de A são não negativos

Definição 2.4. (MEYER, 2000, pg. 559) Para matrizes simétricas de entradas reais as seguintes afirmações são equivalentes e podem ser usadas como definição para matrizes **positivas definidas**.

- $x^T A x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ não nulo;
- Todos os autovalores de A são positivos;
- $A = B^T B$ para algum B não singular;
- Os menores principais líderes de A são positivos;
- Todos os menores principais de A são positivos

Definição 2.5. (MEYER, 2000, pg. 90) O **traço** de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definido como a soma das entradas da diagonal principal de A , isto é

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposição 2.1. (MEYER, 2000, pg. 90) O operador traço é um operador linear, de sorte que para quaisquer matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Proposição 2.2. (MEYER, 2000, pg. 110) Para matrizes A, B, C de dimensões apropriadas, o operador traço é comutativo, ou seja

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$$

Proposição 2.3. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, pg. 79) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Defina a composição com o mapa afim $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(Ax + b)$$

onde $\text{dom } g = \{Ax + b \in \text{dom } f\}$. Então se f é convexa, g também será. De mesmo modo, se f é côncava, g também o será.

Definição 2.6. (MEYER, 2000, pg. 238) Sejam \mathcal{U} e \mathcal{V} espaços vetoriais sobre um campo \mathcal{F} . Uma **transformação linear** de \mathcal{U} para \mathcal{V} é definida como sendo a função linear \mathbf{T} que mapeia \mathcal{U} em \mathcal{V} . Isto é,

$$\mathbf{T}(x + y) = \mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(y) \quad e \quad \mathbf{T}(\alpha x) = \alpha \mathbf{T}(x)$$

$$\mathbf{T}(\alpha x + y) = \alpha \mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{U}, \alpha \in \mathcal{F}$$

Um **operador linear** em \mathcal{U} é definido como a transformação linear de \mathcal{U} em si mesmo, isto é, a transformação linear que mapeia \mathcal{U} de volta a \mathcal{U} .

Definição 2.7. (MEYER, 2000, pg. 412) Para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rank r , existem matrizes ortogonais $U_{m \times m}$, $V_{n \times n}$ e uma matriz diagonal $D_{r \times r} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ tais que

$$A = U \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^\top \quad \text{com} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 \quad (2.1)$$

Os σ_i 's são chamados valores singulares não nulos de A . Quando $r < p = \min\{m, n\}$, a matriz A possui $p - r$ valores singulares nulos adicionais. A fatorização (2.1) é denominada **decomposição em valores singulares** de A , e as colunas de U e V são vetores singulares de A à esquerda e à direita respectivamente.

Definição 2.8. (MEYER, 2000, pg. 123) Considere a matriz em bloco

$$\begin{bmatrix} A_{r \times r} & C_{r \times s} \\ R_{s \times r} & B_{s \times s} \end{bmatrix}$$

Quando as inversas indicadas existirem, as matrizes definidas por

$$S = B - RA^{-1}C \quad e \quad T = A - CB^{-1}R$$

são denominadas **complementos de Schur** de A e B , respectivamente.

2.3 Análise de funções convexas

Definição 2.9. (ROCKAFELLAR, 1970, pg. 25) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo. Então f é uma função convexa se, e somente se,

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Para todo $x, y \in U$.

Teorema 2.1. (ROCKAFELLAR, 1970, pg. 242) *Seja f uma função convexa e seja x um ponto onde f é finita. Se f for diferenciável, então $\nabla f(x)$ existe e, em particular,*

$$f(z) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), z - x \rangle, \quad \forall z$$

Proposição 2.4. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, pg. 79) *A soma não negativa, ponderada de funções convexas é convexa, ou seja, o conjunto de funções convexas forma um cone convexo.*

$$f = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_n f_n, \quad w_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Este resultado pode ser estendido para somas infinitas.

Proposição 2.5. (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, pg. 87) *Se $g(x) = \inf_{y \in C} h(x, y)$ sendo $h(\cdot)$ uma função convexa em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, então $g(x)$ é convexa em \mathbb{R}^n caso C seja um conjunto convexo não vazio e $g(x) > -\infty$ para todo x .*

2.4 Análise de funções não suaves

Proposição 2.6. (BAZARAA et al., 2013, pg. 107) *Seja S um conjunto convexo e não vazio em \mathbb{R}^n e seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa. Então, para $\bar{x} \in \text{int } S$, existe um vetor x^* tal que o hiperplano $H = \{(x, y) : y = f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle\}$ suporta $\text{epi } f$ em $[\bar{x}, f(\bar{x})]$. Em particular, $f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle x^*, x - \bar{x} \rangle$ para todo $x \in S$. Isto é, x^* é um subgradiente (vetor suporte) de f em \bar{x} .*

Proposição 2.7. (ROCKAFELLAR, 1970, pg. 270) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função da forma*

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m$$

onde f_1, \dots, f_m são funções convexas e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são números reais não negativos. Seja também S um subconjunto aberto, convexo e não vazio em \mathbb{R}^n . Então uma condição necessária e suficiente para que o ínfimo de f seja atingido em $x \in S$ é:

$$0 \in [\lambda_1 \partial f_1(x) + \cdots + \lambda_m \partial f_m(x)]$$

Proposição 2.8. (SCHIROTZEK, 2007, pg. 63) *O subdiferencial de uma função convexa $f : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ associa a cada $x \in E$ um (possivelmente vazio) subconjunto $\partial f(x)$ de E^* . Por essa razão, o mapa subdiferencial $\partial f : E \rightrightarrows E^*$ pode ser visto como um protótipo de uma multifunção que associa a cada $x \in \text{dom } f$ o subdiferencial $\partial f(x)$ e a cada $x \notin \text{dom } f$ o conjunto vazio.*

Definição 2.10. (CLARKE, 1990, pg. 37) *Seja f Lipschitz em uma vizinhança de cada ponto de um subconjunto aberto e convexo U do \mathbb{R}^n . Então, f é convexa em U se, e somente se, a multifunção ∂f for monótona em U ; isto é, sse*

$$\langle x - x', \zeta^* - \zeta^{*'} \rangle \geq 0 \quad \text{para todo } x, x' \in U, \zeta^* \in \partial f(x), \zeta^{*'} \in \partial f(x').$$

Proposição 2.9. (ROCKAFELLAR, 1970, pg. 225) Seja $f(x) = h(Ax)$, onde h é uma função convexa em \mathbb{R}^m e A é uma transformação linear de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m . Então,

$$\partial f(x) \supset A^\top \partial h(Ax), \quad \forall x.$$

Se h é poliedral e o range de A meramente contém um ponto de $\text{dom } h$, então

$$\partial f(x) = A^\top \partial h(Ax), \quad \forall x.$$

Definição 2.11. (CLARKE, 1990, pg. 72) Seja $f = g \circ h$, onde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é Lipschitz na vizinhança de x e $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz na vizinhança de $h(x)$. Então, f é Lipschitz na vizinhança de x e tem-se que

$$\partial f(x) \subset \text{co} \left\{ \partial g(h(x)) \partial h(x) \right\}$$

Além do que, se g é estritamente diferenciável em $h(x)$, então vale a igualdade em vez da inclusão e o fecho convexo $\text{co}\{\cdot\}$ torna-se supérfluo. Note também que $\partial h(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\partial(h(x)) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$.

Definição 2.12. (NICULESCU; PERSSON, 2006) Seja U um conjunto ilimitado em \mathbb{R}^n e a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Funções que verificam a condição

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} > 0$$

são denominadas **coercivas**.

Claramente, **coercividade** implica

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2.5 Controle ótimo

O estudo da tomada de decisão em múltiplos estágios era um problema de interesse da *RAND Corporation* e financiado pela força aérea americana na década de 1950. Richard Bellman foi atraído a este problema e iniciou a estratégia da Programação Dinâmica (PD) através do princípio da otimalidade. Esta abordagem é de particular interesse dos sistemas estocásticos, uma vez que fornece políticas ótimas de controle em forma de realimentação de estados.

Em linhas gerais, um problema de controle (ou decisão) ótimo, é o de selecionar uma sequência de controles admissíveis de modo a minimizar um dado critério de desempenho sobre o conjunto de todas as políticas admissíveis.

A especificação de um problema de controle (ou decisão) ótimo, envolve observações dos estados de um processo que se tornam disponíveis progressivamente à medida em que o sistema evolui, bem como a determinação de controles (ou decisões) admissíveis

e como estes influenciam a dinâmica do sistema de interesse. Teoria de Controle estuda métodos para escolha da política de controle com intuito de se alcançar um certo comportamento dinâmico. Em Controle Ótimo, especifica-se este comportamento por meio de uma função objetivo que é função da trajetória descrita pelo sistema, e que o controlador procura otimizar. Dessa forma, para um problema de controle em horizonte finito de N estágios e com observação completa de estados, consideram-se funções de custo que são aditivas no tempo e, portanto, propõe-se o problema de controle como enunciado a seguir.

Proposição 2.10. *Seja um problema de controle estocástico em horizonte finito de N estágios, dispondo-se de observação completa dos estados. Seja Π o conjunto de todas políticas de controle admissíveis e x_0 um estado inicial dado*

$$J_0^*(x_0, \pi^*) = \inf_{\pi \in \Pi} \left\{ E_{x_0}^\pi \left[f(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, u_k) \right] \right\} \quad (2.2)$$

$$\textbf{s.a.} \quad x_{k+1} = g(x_k, u_k, w_k)$$

em que $E_{x_0}^\pi[\cdot]$ é o valor esperado quando a política $\pi = \{u(x_1), \dots, u(x_{N-1})\}$ é utilizada partindo-se do estado inicial x_0 . Ademais, para cada $\pi \in \Pi$ e um estado inicial independente de w_k , $x_{k+1} = g(x_k, u(x_k), w_k)$ é um processo de Markov e representa o estado do sistema sob a política de controles Markovianos $\pi = \{\pi(x_k)\}_{k=0}^{N-1}$. O custo incorrido a cada período $0 \leq k \leq N-1$ é denominado custo por estágio e é representado por $c(x_k, u_k)$ e, no último estágio, incorre-se o custo terminal $f(x_N)$. A qualquer instante $k \in [0, N]$, o custo de partida em valor esperado é representado por $J_k(x)$. Por fim, a **política ótima** π^* é tal que minimiza o custo total em valor esperado

$$J_0^*(x) = J_0^*(x, \pi^*) \leq J_0(x, \pi) \quad \forall \pi \in \Pi \quad (2.3)$$

em que $J_0(x)$ é o custo total incorrido e $J_0^*(x)$ é o custo ótimo ou **função valor**.

Proposição 2.11 (Programação Dinâmica (PD)). *Seja o problema de controle estocástico ótimo em horizonte finito como enunciado pela Proposição 2.10. O algoritmo da PD computa o custo ótimo (2.2) retrogradamente no tempo ao resolver $N-1$ subproblemas tipo cauda da seguinte maneira:*

1. Inicie no período N e compute trivialmente $J_N^*(x_N)$;
2. Proceda no horizonte retrocedente e resolva no estágio k

$$J_k^*(x) = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left\{ E \left[c(x, u) + J_{k+1}^*(g(x, u, w)) \right] \right\} \quad (2.4)$$

3. Então, $J_0^*(x)$ computado no último estágio é o **valor do problema**, ou custo total ótimo $J_0^*(x)$.

4. A **política ótima** π^* é a sequência de controles u^* que minimizam (2.4) para os $N - 1$ subproblemas tipo cauda, i.e.

$$\pi^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\} \quad (2.5)$$

O algoritmo da programação dinâmica é baseado em uma ideia bastante intuitiva, o **princípio da otimalidade** de Bellman. Este princípio enuncia o seguinte fato lógico. Assuma que $\pi^* = \{u_0^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ é uma política ótima para o problema descrito pela Proposição 2.10. Além disso, suponha que ao empregar a política π^* , alcança-se o estado x_i no estágio i com probabilidade positiva. Então, deve-se ter que a política truncada $\pi^{i*} = \{u_i^*, \dots, u_{N-1}^*\}$ também é ótima para o subproblema tipo cauda expresso por:

$$J_i^*(x_i, \pi^i) = \inf_{\pi^i} E_{x_i}^{\pi^i} \left[f(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} c(x_k, u_k) \right] \quad (2.6)$$

Caso contrário, se houver uma outra política $\hat{\pi} = \{\hat{u}_i, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$ estritamente melhor que π^i no sentido de incorrer um custo de partida tal que $J_i^*(x_i, \hat{\pi}) < J_i^*(x_i, \pi^{i*})$, decorre deste fato que a política combinada $\{u_0^*, \dots, u_{i-1}^*, \hat{u}_i, \dots, \hat{u}_{N-1}\}$, ao invés de u^* , é a política ótima, o que contradiz a hipótese de otimalidade de π^* (absurdo).

2.6 Solução de Riccati e Lyapunov generalizadas

Esta seção visa apresentar métodos para obtenção de uma solução numérica para as equações modificadas de Lyapunov e Riccati que surgem naturalmente no problema de controle CVIU. Condições suficientes para existência e unicidade dessas soluções serão apresentadas. Mais especificamente, mostra-se que sob suposições adequadas de positividade, estabilizabilidade e detetabilidade sobre seus coeficientes, a solução de (2.7) converge, iterativamente, a partir de qualquer valor inicial dado (semidefinido positivo) para a solução estabilizante de (2.8). Neste sentido, considere equações matriciais a diferenças

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= A^\top Y_k A + Q + \Pi_1(Y_k) - (B^\top Y_k A + N^\top + \Pi_{12}(Y))^\top \\ &\quad \times (B^\top Y_k B + R + \Pi_2(Y))^{-1} (B^\top Y_k A + N^\top + \Pi_{12}(Y)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

e o operador matricial racional $\mathcal{R} : D(\mathcal{R}) \rightarrow S^{n+}$ que define as equações algébricas

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Y) &= A^\top Y A + Q + \Pi_1(Y) - (B^\top Y A + N^\top + \Pi_{12}(Y))^\top \\ &\quad \times (B^\top Y B + R + \Pi_2(Y))^{-1} (B^\top Y A + N^\top + \Pi_{12}(Y)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Com isso, para algum $Q \succeq 0$, $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $R \succ 0$, serve-se da forma matricial em blocos

$$O := \begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad Q - NR^{-1}N^\top \succeq 0 \quad (2.9)$$

De mesma maneira, define-se o operador $\Pi : S^{n+} \rightarrow S^{(n+m)+}$ tal que

$$\Pi(Y) := \begin{bmatrix} \Pi_1(Y) & \Pi_{12}(Y) \\ \Pi_{12}(Y)^\top & \Pi_2(Y) \end{bmatrix}$$

é um operador linear positivo, isto é, aplicando-se $Y \succeq 0$ ao operador, obtém-se $\Pi(Y) \succeq 0$. A seguir, considere equações de Lyapunov (2.10) linearmente perturbadas. Estas equações são de fundamental importância na análise de solução das equações de Riccati generalizadas (2.8).

$$Y = A^\top Y A + \Pi_1(Y) + Q \quad (2.10)$$

Para os resultados apresentados a seguir, defina o operador Lyapunov \mathcal{L}_A a tempo discreto por $\mathcal{L}_A : S^{n+} \rightarrow S^{n+}$, $Y \mapsto A^\top Y A$.

Lema 2.1. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Suponha que $(I - \mathcal{L}_A - \Pi_1)(Y)$ seja um operador inverso-positivo¹. Então, (2.10) tem solução Y única e $Q \succeq 0$ implica em $Y \succeq 0$.*

O teorema que se enuncia a seguir, generaliza a versão discreta do teorema de estabilidade de Lyapunov para as equações modificadas do tipo (2.10).

Teorema 2.2. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) *Todos autovalores de A encontram-se no interior do disco unitário e*

$$r\left((I - \mathcal{L}_A)^{-1}\Pi_1\right) < 1$$

(ii) *$I - \mathcal{L}_A - \Pi_1$ é inverso-positivo.*

(iii) *Existe algum $Y \succ 0$ tal que $(I - \mathcal{L}_A - \Pi_1)(Y) \succ 0$.*

(iv) *Se $Q \succ 0$, então (2.10) tem solução única $Y \succ 0$.*

(v) *$\mathcal{L}_A + \Pi_1$ é estável.*

Se qualquer uma dessas condições for satisfeita, então diz-se que A é estável relativo a Π_1 .

Definição 2.13 (estabilizabilidade). *Um par (A, B) de matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é dito estabilizável relativo a Π se existe uma matriz F tal que $A + BF$ é estável relativo a*

$$\begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^\top \Pi(Y) \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}$$

De acordo com o Teorema 2.2 (item iii), (A, B) é estabilizável relativo a Π se, e somente se, a desigualdade

$$Y - (A + BF)^\top Y (A + BF) - \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^\top \Pi(Y) \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} > 0$$

é satisfeita para algum par (F, Y) , com $Y \succ 0$.

¹ Um operador \mathcal{T} é chamado inverso-positivo se a inversa \mathcal{T}^{-1} existe e é um operador positivo.

Definição 2.14 (detetabilidade). *Um par (C, A) de matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é dito detetável relativo a Π_1 se existe uma matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $A + LC$ é estável relativo a Π_1 .*

Logo, das Definições 2.13 e 2.14 acima, pode-se enunciar o seguinte lema:

Lema 2.2. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Suponha que $Q \succeq 0$ e que (2.10) tenha uma solução $Y \succeq 0$.*

- (i) *Se $Q \succ 0$, então A é estável relativo a Π_1 e tem-se que $Y \succ 0$.*
- (ii) *Se (Q, A) é detetável relativo a Π_1 , então A é estável relativo a Π_1 .*

Tendo-se introduzido estes conceitos, enunciam-se a seguir alguns resultados importantes para a derivação do método iterativo para solução de (2.7).

Lema 2.3. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Sejam $Y_1, Y_2 \in D(\mathcal{R})$ matrizes simétricas. Para $i = 1, 2$, defina*

$$F_i := F(Y_i) = -[B^\top Y_i B + R + \Pi_2(Y_i)]^{-1} [B^\top Y_i A + N^\top + \Pi_{12}(Y)]$$

Então valem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Y_1) &= (A + BF_2)^\top Y_1 (A + BF_2) \\ &\quad - (F_2 - F_1)^\top [B^\top Y_1 B + \Pi_2(Y_1)] (F_2 - F_1) + \begin{bmatrix} I \\ F_2 \end{bmatrix}^\top [O + \Pi(Y_1)] \begin{bmatrix} I \\ F_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Y_2) - \mathcal{R}(Y_1) &= (A + BF_2)^\top (Y_2 - Y_1) (A + BF_2) \\ &\quad + (F_2 - F_1)^\top [B^\top Y_1 B + \Pi_2(Y_1)] (F_2 - F_1) + \begin{bmatrix} I \\ F_2 \end{bmatrix}^\top [\Pi(Y_2 - Y_1)] \begin{bmatrix} I \\ F_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Seja um dado intervalo discreto $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ (não necessariamente finito). Uma sequência $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ definida em um intervalo \mathcal{I} é dita solução de $Y_k = \mathcal{R}(Y_{k+1})$ se satisfaz a equação a diferenças (2.7) com a condição adicional $Y_k \in D(\mathcal{R})$ para cada $k \in \mathcal{I}$.

Teorema 2.3. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Teorema da Comparação: Seja $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ um intervalo discreto e um instante de tempo final $k_f \in \mathcal{I}$. Assuma que $\{Y_k^2\}$ e $\{Y_k^1\}$ são, no intervalo \mathcal{I} , soluções de $Y_{k+1}^2 = \mathcal{R}(Y_k^2)$ e $Y_{k+1}^1 = \tilde{\mathcal{R}}(Y_k^1)$ respectivamente. Se*

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{N} \\ \tilde{N}^\top & \tilde{R} \end{bmatrix},$$

então, $Y_{k_f}^2 \succeq Y_{k_f}^1$ implica que $Y_k^1 \in D(\mathcal{R})$ e $Y_k^2 \succeq Y_k^1$ para todo $k \in \mathcal{I}$ com $k \leq k_f$.

O Teorema 2.3 mostra que as soluções de (2.7) dependem monotonicamente de O (2.9) e do valor terminal Y_{k_f} . Note que este teorema generaliza o procedimento de solução das equações de Riccati na forma padrão.

Corolário 2.6.1. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Seja $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ um intervalo discreto e $k_f \in \mathbb{Z}$. Assuma que $\{Y_k^\ell\}$, $\{Y_k^u\}$ são, no intervalo \mathcal{I} , soluções das desigualdades a diferenças $Y_{k+1}^\ell \preceq \mathcal{R}^d(Y_k^\ell)$ e $Y_{k+1}^u \succeq \mathcal{R}^d(Y_k^u)$ respectivamente. Então, $Y_{k_f}^\ell \preceq Y_f \preceq Y_{k_f}^u$ implica que a solução de*

$$Y_{k+1} = \mathcal{R}^d(Y_k), \quad Y_{k_f} = Y_f$$

existe para todo $k \in \mathcal{I}$ e satisfaz a desigualdade

$$Y_k^\ell \preceq Y_k \preceq Y_k^u$$

2.6.1 Método iterativo tipo Newton-Kantorovich

A obtenção de soluções estabilizantes para equações racionais de Riccati a diferenças (2.7) é alcançada por meio de um procedimento iterativo que pode ser visto como um variante do método de Newton-Kantorovich aplicado à equação $\mathcal{R}(Y) = Y$. A Definição 2.15 caracteriza o que se concebe uma solução estabilizante no contexto de equações racionais de Riccati (ou Riccati generalizadas).

Definição 2.15. *Seja $\hat{Y} \in D(\mathcal{R})$ uma solução de $\mathcal{R}(Y) = Y$. Se $F = F(\hat{Y})$ denota a matriz de realimentação de estados correspondente e $\hat{\Pi}$ é o operador linear positivo definido por*

$$\hat{\Pi}(Y) := \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^\top \Pi(Y) \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}$$

para $Y \in S^{n+}$, então \hat{Y} é denominada solução estabilizante se o espectro $\sigma(\mathcal{L}_{A+BF} + \hat{\Pi})$ está contido no disco unitário aberto.

Assim, dispondo-se dos resultados e definições supra enunciados, o processo iterativo para obtenção da solução estabilizante para (2.7) é como se passa a descrever. Seja o par (A, B) estabilizável relativo a Π . Então, existe uma matriz F_0 tal que $A_0 := (A + BF_0)$ é estável com respeito a

$$\begin{bmatrix} I \\ F_0 \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} I \\ F_0 \end{bmatrix}$$

A partir daí, para a inicialização do algoritmo, seja Y_1 a única solução da equação de Lyapunov linearmente perturbada

$$A_0^\top Y_1 A_0 - Y_1 + \begin{bmatrix} I \\ F_0 \end{bmatrix}^\top \left[O + \Pi(Y_1) \right] \begin{bmatrix} I \\ F_0 \end{bmatrix} + I = 0 \quad (2.13)$$

Então, iniciando-se o processo iterativo tendo em mãos A_0, F_0, Y_1 , constroem-se três seqüências de matrizes $\{A_i\}_{i=0}^\infty, \{F_i\}_{i=0}^\infty$ e $\{Y_i\}_{i=0}^\infty$, com

$$Y_1 \succ Y_2 \succ \dots \succ Y_n \succ \dots$$

$$A_i = (A + BF_i)$$

tal que,

$$F_i = -[B^\top Y_i B + R + \Pi_2(Y_1)]^{-1} [B^\top Y_i A + N^\top + \Pi_{12}(Y)] \quad (2.14a)$$

$$A_i^\top Y_{i+1} A_i - Y_{i+1} + \begin{bmatrix} I \\ F_i \end{bmatrix}^\top [O + \Pi(Y_{i+1})] \begin{bmatrix} I \\ F_i \end{bmatrix} + \frac{1}{i+1} I = 0 \quad (2.14b)$$

De modo que, no limite, obtém-se uma seqüência não crescente $\{Y_k\}_{k=0}^\infty$ de matrizes limitadas (Cf. Corolário 2.6.1), tal que

$$Y_+ := \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k$$

existe e é uma matriz simétrica, positiva semidefinida com $Y_+ \in D(\mathcal{R})$. Tomando o limite em (2.14b) quando $i \rightarrow \infty$ e denotando $F_+ := F(Y_+)$, tem-se que

$$\alpha A_+^\top Y_+ A_+ - Y_+ + \begin{bmatrix} I \\ F_+ \end{bmatrix}^\top [O + \Pi(Y_+)] \begin{bmatrix} I \\ F_+ \end{bmatrix} = 0$$

Ademais, caso se observem as seguintes condições de positividade sobre as matrizes de custo $R \succ 0$ e $Q \succ N^\top R^{-1} N$ e $\alpha^{1/2} A$ seja estável relativo a Π_1 , então, invocando o resultado expresso pelo item i do Lemma 2.2, pode-se inferir o seguinte resultado sobre a solução de (2.8)

Lema 2.4. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Assuma que*

$$R \succ 0 \quad e \quad Q \succ NR^{-1}N^\top$$

então se $Y \succeq 0$ é uma solução de $\mathcal{R}(Y) = Y$, segue que Y é solução estabilizante e positiva definida.

2.6.1.1 Convergência do método

Em uma aplicação direta do Teorema da Comparação 2.3, fazendo-se $Y_k^2 := Y_k$ e $Y_k^1 := Y_{k-1}$, obtém-se a propriedade de monotonicidade para as soluções de $\mathcal{R}(Y) = Y$ que, conseqüentemente, generaliza os resultados para as equações racionais de Riccati a diferença.

Lema 2.5. (FREILING; HOCHHAUS, 2003) *Seja $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$ um intervalo discreto e o tempo final $k_f \in \mathcal{I}$. Assuma que Y_k é, no intervalo \mathcal{I} , solução de $Y_{k+1} = \mathcal{R}(Y_k)$. Então, $Y_{k_f} \succeq Y_{k_f-1}$ ($Y_{k_f} \preceq Y_{k_f-1}$) implica que $Y_k \succeq Y_{k-1}$ ($Y_k \preceq Y_{k-1}$) para todo $k \in \mathcal{I}$ com $k \leq k_f$.*

Neste ponto, enuncia-se o resultado mais importante desta seção, que explicita condições suficientes para a solução de equações de Riccati racionais (2.7).

Teorema 2.4. (*FREILING; HOCHHAUS, 2003*) *Assuma que as seguintes hipóteses sejam válidas:*

- (i) $R \succ 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \succeq 0$,
- (ii) (A, B) é d -estabilizável relativo a Π ,
- (iii) $(Q - NR^{-1}N^\top, A - BR^{-1}N^\top)$ é detetável relativo a

$$\begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N \end{bmatrix}$$

então, $\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = Y_+$ para qualquer solução $\{Y_k\}$ de $Y_{k+1} = \mathcal{R}(Y_k)$, com $Y_0 \succeq 0$.

Comentário 2.1. *Note que, apesar de se conhecerem condições que devem ser atendidas para solução das equações racionais de Riccati do tipo (2.7), o método iterativo apresentado conta, no caso geral, com uma certa limitação no sentido em que este requer uma matriz estabilizante F_0 para sua inicialização. Por outro lado, no caso particular no qual as condições suficientes apresentadas no Teorema 2.4 forem satisfeitas, a solução de (2.7) converge monotonicamente (Cf. Lema 2.5) a partir de qualquer valor inicial semidefinido positivo para a solução estabilizante de (2.8).*

3 Construção do modelo

3.1 O modelo CVIU

Sejam X e U espaços normados e separáveis, onde X denota o espaço de estados e U , o conjunto de controles. Define-se Π como o conjunto de todas políticas de controles admissíveis, particularmente o conjunto de todas sequências $\pi = \{u_k(x_k)\}_{k=1}^N$, para cada $0 \leq k \leq N$, $u : X \rightarrow U$ com $u(x) \in \mathcal{U}(x)$, determina uma ação de controle $u_k = u_k(x_k)$ como uma função mensurável do estado. Neste contexto, $\mathcal{U}(x)$ indica a correspondência de X para U que representa os controles admissíveis para cada estado $x \in X$, e cada π é uma política admissível de Markov.

Considere um sistema estocástico que evolua no tempo de acordo com a seguinte equação a diferenças:

$$z_{k+1} = G(z_k, v_k, w_k) \quad (3.1)$$

onde $z_k \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estados, $v_k \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $w_k \in \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena de distúrbio, independente do estado inicial z_0 .

Suponha que o sistema em (3.1) seja completamente observável. Contudo, sua dinâmica G é desconhecida no sentido que, para a síntese de controle, não se dispõe de um modelo que represente G com alguma precisão. Assuma também que o sistema incerto (3.1) esteja operando ao redor de um dos seus pontos fixos, digo (z_e, v_e) . Nesta situação, pode-se conceber um modelo matemático “grosseiro” na tentativa de reproduzir o comportamento dinâmico deste sistema em uma vizinhança do ponto fixo em questão. Através da linearização do modelo grosseiro obtido e das mudanças de variáveis $x_k = z_k - z_e$ e $u_k = v_k - v_e$ que descrevem os desvios do controle e estado dos valores nominais no equilíbrio, pode-se obter a representação linear em espaço de estados para (3.1) a ser expressa por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \sigma w_k \quad (3.2)$$

onde as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são invariantes no tempo e w_k é uma sequência i.i.d de variáveis aleatórias gaussianas com média zero e variância finita.

Note que devido a incertezas paramétricas, dinâmicas não modeladas ou não linearidades, a dinâmica linearizada (3.2) pode ser uma representação pobre para (3.1) até mesmo no ponto de equilíbrio. Claramente, à medida em que o estado afasta-se do equilíbrio, o modelo grosseiro linearizado tende a se tornar ainda mais impreciso. A abordagem CVIU apreça esta perda de acurácia do modelo causada pelos desvios do estado e do controle do equilíbrio como um aumento da incerteza que afeta o sistema. Neste sentido, a incerteza induzida pelas variações do estado e controle é representada pela adição de parcelas estocásticas extras ao modelo linear. Desse modo, um modelo que reproduz

o princípio CVIU pode ser obtido ao promover a substituição do modelo (3.2) por um outro que, por exemplo, disponha de parcelas estocásticas moduladas pela magnitude dos desvios do estado e do controle com respeito aos seus respectivos valores nominais no equilíbrio. Nesse sentido, apresenta-se o seguinte modelo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + \hat{\sigma}(x_k, u_k)W_k \\ \hat{\sigma}(x_k, u_k) &= \begin{bmatrix} \sigma & \sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x_k|) & \sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u_k|) \end{bmatrix} \\ W_k &= \begin{bmatrix} w_k^\top & \varepsilon_k^{x^\top} & \varepsilon_k^{u^\top} \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (3.3)$$

dado que $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é o parâmetro de intensidade do ruído da natureza, $\sigma_x, \bar{\sigma}_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma_u, \bar{\sigma}_u \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são parâmetros adequados de intensidade para as parcelas extra de ruídos n e m -dimensionais $\{\varepsilon_k^x\}$, $\{\varepsilon_k^u\}$ respectivamente, juntamente com a sequência de ruído original da natureza $\{w_k\}$. Estas são sequências de vetores aleatórios gaussianos, decorrelacionados, média zero, independentes e igualmente distribuídos com matriz de covariância unitária.

3.1.1 Considerações a respeito do modelo CVIU

O modelo CVIU, conforme apresentado em (3.3), empenha-se em contabilizar as múltiplas fontes de incerteza que, porventura, o sistema possa estar sujeito. Observe que as incertezas introduzidas nas variáveis de estado e de controle no equilíbrio são representadas pelos termos $\sigma_x \varepsilon^x$, $\sigma_u \varepsilon^u$. Estas incertezas manifestam-se das disparidades entre as matrizes nominais do sistema (A^0, B^0) as quais não se conhecem e as matrizes incertas (A, B) utilizadas pelo modelo grosseiro. Além disso, quando o sistema se afasta do equilíbrio, as porções multiplicativas dos ruídos, isto é, $\bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|) \varepsilon^x$ e $\bar{\sigma}_u \text{diag}(|u|) \varepsilon^u$, descrevem o aumento de incerteza que decorre da perda de acurácia do modelo linear adotado.

Sob outra perspectiva, pode-se também estabelecer uma relação entre o modelo CVIU em (3.3) e aquele alusivo a sistemas com incertezas paramétricas modeladas como ruídos multiplicativos. Sistemas estocásticos com perturbações multiplicativas aparecem naturalmente em muitos problemas de controle e, por esse motivo, são estudados extensivamente na literatura. O leitor interessado é referido a (GHAOUI, 1995; HINRICHSEN; PRITCHARD, 1996; UGRINOVSKII, 1998) para consulta. A representação destes modelos toma a seguinte forma

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \sigma w_k + \sum_{i=1}^n \left(A_i x_k + B_i u_k + \sigma_i w_k \right) \xi_k^i \quad (3.4)$$

com w_k , ξ_k sequências decorrelacionadas de ruído branco. Embora estruturalmente diferentes, ao fazer σ_x , σ_u igual a zero em (3.3), o modelo CVIU resultante descreve incertezas paramétricas multiplicativas estruturalmente similares àquelas de (3.4).

Comentário 3.1. *A representação de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas modeladas como em (3.4), embora bastante difundida na literatura, pode ser vista como um excesso de parametrização. Observe como o modelo CVIU (3.3) é capaz de capturar, de maneira consideravelmente mais descomplicada, incertezas de naturezas similares.*

4 Síntese do controlador CVIU

Neste capítulo, estuda-se o problema de controle estocástico ótimo para o modelo CVIU em (3.3) num caso geral. Posteriormente explora-se o caso particular considerando o problema de controle CVIU em horizonte infinito com custo quadrático descontado. Além disso, este capítulo explora propriedades que se provarão de grande valia posteriormente neste trabalho. Desenvolve-se, por exemplo, a caracterização da convexidade para a função valor do problema de controle CVIU. Esta caracterização é de indispensável importância na abordagem encontrada neste trabalho e constitui pedra fundamental sobre a qual se constroem as soluções a serem apresentadas neste Capítulo subsequentemente.

4.1 O problema de controle estocástico ótimo para o modelo CVIU

O problema de controle ótimo diz respeito a otimizar o comportamento dinâmico de sistemas utilizando informações que se tornam progressivamente disponíveis a medida em que estes sistemas evoluem. O sistema que é resultado final de um *design* ótimo não se limita a apenas ser estável ou satisfazer quaisquer outras restrições associadas ao controle clássico, mas se supõe ser o melhor sistema possível de um tipo particular (ANDERSON; MOORE, 1971).

No que diz respeito ao objetivo de controle, a ideia por trás da formulação do controle ótimo é a que segue: especifica-se precisamente uma classe de controles admissíveis e um funcional de custo é associado a cada controle. A partir desse ponto, pode-se investigar qual ação incorre o menor custo; este será o controle ótimo. Uma vez que se dispõe da dinâmica do sistema, da classe de controles admissíveis e de um funcional de custo, a determinação do controle ótimo é, em princípio, um problema meramente matemático que não envolve nenhum julgamento de engenharia (DAVIS, 2013).

Dessa forma, um funcional de custo típico que avalia a performance do sistema em cada estágio de tempo $0 \leq k \leq N$ é dado por

$$J_0^*(x, \pi) := \inf_{\pi \in \Pi} \left\{ E_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, u_k) + f(x_N) \right] \right\}, \quad x_0 = x \in X \quad (4.1)$$

sendo $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ a função custo por estágio (ou custo imediato) e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é a função custo terminal. Durante toda a extensão deste trabalho, considera-se que $c(\cdot, \cdot)$ é conjuntamente convexa em x e u , $f(\cdot)$ é convexa em x e para propósito de controle, os sistemas em consideração serão completamente observáveis. Ademais, $E_x^\pi[\cdot]$ corresponde ao valor esperado quando se emprega a política de controle π e se inicia o processo em um estado inicial $x_0 \in X$ no instante $k = 0$. O problema de controle ótimo formulado nestas condições é o de minimizar $\pi \rightarrow J_0(\pi, x)$ sobre a classe Π de todas políticas admissíveis.

Isto é, busca-se determinar

$$J_k^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_k(x, \pi), \quad \forall x \in X \quad (4.2)$$

em que $J_k^*(x)$ é o custo de partida ótimo do k -ésimo estágio em diante, ou função valor no estágio de tempo k . A política de controle ótima π^* é tal que incorre o custo mínimo (4.3), i.e.

$$J_0^*(x) = J_0^*(x, \pi^*), \quad \forall x \in X \quad (4.3)$$

Defina-se um operador atualizador de estados $x_{k+1} = h(x_k, u_k, \xi_k)$ que atualize os estados do sistema de acordo com uma lei de transição definida pela dinâmica CVIU em (3.3). Mais especificamente,

$$x_{k+1} = h(x, u, \xi) = Ax + Bu + \hat{\sigma}(x, u)W \quad (4.4)$$

sempre que $x_k = x$, $u_k = u$ e $W_k = \xi$.

Desse ponto, considere a equação de Bellman correspondente à minimização de um estágio do problema de controle ótimo em horizonte finito. Esta equação deriva o conceito de Programação Dinâmica (PD) cujo método computa, de maneira recursiva, funções custo de partida em valor esperado para cada estágio do horizonte. O algoritmo da PD resolve o $(N - k)$ -ésimo subproblema tipo cauda iniciando o problema no estado x no tempo k até o tempo final N . Sendo assim,

$$J_k^*(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(x)} E \left[c(x, u) + J_{k+1}^*(h(x, u, \xi)) \right] \quad (4.5)$$

4.1.1 Convexidade da Função Valor

O Teorema 4.1 caracteriza, sob algumas condições, a Função Valor (4.2) quanto a sua convexidade. Esta é uma questão de suma importância no entendimento da solução do problema de controle CVIU.

Teorema 4.1. *Sejam $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções (estritamente) convexas e mensuráveis em (4.1). Então, observadas as condições de positividade (4.6), o custo de partida $(x, u) \rightarrow J_k(x, u)$ assim como a Função Valor do problema $x \rightarrow J_k^*(x)$ em (4.2) são aplicações contínuas e (estritamente) convexas em seus argumentos para cada $0 \leq k \leq N$.*

$$\sigma_x \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \sigma_x^\top \succeq 0 \quad \sigma_u \bar{\sigma}_u^\top + \bar{\sigma}_u \sigma_u^\top \succeq 0 \quad (4.6)$$

Primeiramente, apresentam-se alguns resultados preliminares necessários para a prova do teorema.

Definição 4.1. *Sejam \mathbb{X} , \mathbb{Y} duas variáveis aleatórias Gaussianas em \mathbb{R}^n . Sob o ordenamento estocástico convexo, dizemos que \mathbb{X} é menor ou igual a \mathbb{Y} , denota-se $\mathbb{X} \leq_{cx} \mathbb{Y}$, se para toda função convexa $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se que $E[\varphi(\mathbb{X})] \leq E[\varphi(\mathbb{Y})]$.*

Proposição 4.1. (MÜLLER, 2001) *Sejam \mathbb{X}, \mathbb{Y} dois vetores de variáveis aleatórias Gaussianas n -dimensionais com distribuições $\mathcal{N}(\mu_{\mathbb{X}}, \Sigma_{\mathbb{X}})$ e $\mathcal{N}(\mu_{\mathbb{Y}}, \Sigma_{\mathbb{Y}})$, respectivamente. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

$$i) \mathbb{X} \leq_{cx} \mathbb{Y}$$

$$ii) \mu_{\mathbb{X}} = \mu_{\mathbb{Y}} \text{ e } \Sigma_{\mathbb{Y}} - \Sigma_{\mathbb{X}} \succeq 0$$

Lema 4.1. *Sob as condições apresentadas no Teorema 4.1, sejam $\{x_k\}_{k \geq 0}$ e $\{y_k\}_{k \geq 0}$ dois processos CVIU controlados em \mathbb{R}^n em um horizonte de N estágios. Admita que esses processos partam de condições iniciais idênticas $x_0 = y_0 = \rho$ e sujeitos ao mesmo controle de Markov u . Ademais, suponha também que estes processos sejam tais que satisfaçam $\sigma_y(\sigma_y)^\top - \sigma_x(\sigma_x)^\top \succeq 0$ para todo $k \in [0, N]$. Então, para quaisquer funções de custo $c(\cdot)$ e $f(\cdot)$ satisfazendo as condições do Teorema 4.1, vale a desigualdade*

$$E_\rho \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, u_k) + f(x_N) \right] \leq E_\rho \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(y_k, u_k) + f(y_N) \right]$$

Demonstração do Lema 4.1. Primeiramente, note que os processos $\{x_k\}_{k \geq 0}$ e $\{y_k\}_{k \geq 0}$ como enunciados no lema, são processos de Gauss-Markov. Isto é, o estado sucessor x_{k+1} depende apenas do par estado-controle corrente (x_k, u_k) . Além disso, por terem condições iniciais idênticas e serem regidos pelo mesmo controle, apresentam a mesma média. Portanto, segue da convexidade das funções de custo c e f , da estatística dos processos $\{x_k\}_{k \geq 0}$ e $\{y_k\}_{k \geq 0}$ e da Proposição 4.1 que

$$E_\rho[c(x_k, u_k)] \leq E_\rho[c(y_k, u_k)], \quad \forall k \in [0, N] \quad (4.7a)$$

$$E_\rho[f(x_N)] \leq E_\rho[f(y_N)] \quad (4.7b)$$

A somatória de (4.7a) ao longo de $k \in [0, N]$ e posterior adição com (4.7b) mostram a desigualdade no lema. \square

Demonstração do Teorema 4.1. Para a caracterização da convexidade do problema, há de se mostrar que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [0, 1]$ e $0 \leq k \leq N$, vale a desigualdade

$$J_k^*(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta J_k^*(x) + (1 - \theta)J_k^*(y) \quad (4.8)$$

Nesse sentido, sejam $\{x_k\}_{k \geq 0}$ e $\{y_k\}_{k \geq 0}$ dois processos CVIU controlados com $u_k^x, u_k^y \in \mathcal{U}[\cdot] \subset U$ controles de Markov e com condições iniciais $x_0 = x$ e $y_0 = y$. Com isso, para todo $k > 0$, tem-se as trajetórias

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{m=1}^k A^{k-m} (B u_m^x + \hat{\sigma}(x_m, u_m^x) W_m) \quad (4.9)$$

$$y_k = A^k y_0 + \sum_{m=1}^k A^{k-m} (B u_m^y + \hat{\sigma}(y_m, u_m^y) W_m) \quad (4.10)$$

Agora, considere um processo $\{z_k\}_{k \geq 0}$ artificialmente criado a partir da combinação convexa entre os processos em (4.9) e com condição inicial $z_0 = \theta x_0 + (1 - \theta)y_0$ e controle $u_k^z = \theta u_k^x + (1 - \theta)u_k^y$, ou seja

$$z_k = A^k z_0 + \sum_{m=1}^k A^{k-m} [B u_m^z + (\theta \hat{\sigma}(x_m, u_m^x) + (1 - \theta) \hat{\sigma}(y_m, u_m^y)) W_m] \quad (4.11)$$

Neste momento, considere um horizonte de controle de N estágios e as funções de custo $c(\cdot)$ e $f(\cdot)$ que compõem o funcional (4.1). Segue diretamente da convexidade dessas funções que

$$c(z_k, u_k^z) \leq \theta c(x_k, u_k^x) + (1 - \theta) c(y_k, u_k^y), \quad k \in [0, N] \quad (4.12a)$$

$$f(z_N) \leq \theta f(x_N) + (1 - \theta) f(y_N) \quad (4.12b)$$

A seguir, ao tomar a esperança e o somatório de (4.12a) e (4.12b) para todo $k \in [0, N]$, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{z_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(z_k, u_k^z) + f(z_N) \right] &\leq \\ &\theta E_{z_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(x_k, u_k^x) + f(x_N) \right] + (1 - \theta) E_{z_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(y_k, u_k^y) + f(y_N) \right] \\ &= \theta J(x) + (1 - \theta) J(y) \end{aligned} \quad (4.13)$$

e note que no caso em que as funções de custo c e f são tomadas estritamente convexas, então a desigualdade acima é estrita.

Observe, entretanto, que $\{z_k\}_{k \geq 0}$ não representa um processo solução para um sistema CVIU descrito pela equação a diferenças (3.3) partindo de um estado inicial z_0 sob a política $\{\theta u_k^x + (1 - \theta)u_k^y\}_{k \geq 0}$. Pode-se, por outro lado, definir um outro processo $\{\vartheta_k\}_{k \geq 0}$ que represente uma trajetória viável para um sistema CVIU com condição inicial $\vartheta_0 = \theta x_0 + (1 - \theta)y_0$ e política de controle $u_k^\vartheta = \theta u_k^x + (1 - \theta)u_k^y$. Daí,

$$\vartheta_k = A^k \vartheta_0 + \sum_{m=1}^k A^{k-m} (B u_m^\vartheta + \hat{\sigma}(\vartheta_m, u_m^\vartheta) W_m) \quad (4.14)$$

e o custo incorrido pela aplicação da política de controle $\{u_k^\vartheta\}_{k \geq 0}$ ao processo $\{\vartheta_k\}_{k \geq 0}$ fornece um limitante inferior para (4.13). Para constatação, primeiramente note que ambos processos $\{z_k\}_{k \geq 0}$ e $\{\vartheta_k\}_{k \geq 0}$ partem do mesmo estado inicial, estão sujeitos à mesma política e, por efeito das porções estocásticas serem tipo ruído branco, têm mesma média. Dito isto, para invocar o Lema 4.1, basta verificar a condição sobre os segundos momentos destes processos. Isto é, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [0, 1]$ e $u, v \in \mathbb{R}^m$, deve-se ter

$$(\theta \hat{\sigma}(x, u) + (1 - \theta) \hat{\sigma}(y, v))(\bullet)^\top - \hat{\sigma}(\theta x + (1 - \theta)y, \theta u + (1 - \theta)v)(\bullet)^\top \succeq 0 \quad (4.15)$$

Ao analisar a expressão (4.15), tem-se que a primeira forma simétrica é composta por

$$\begin{aligned} & \sigma\sigma^\top + (\theta(\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|)) + (1-\theta)(\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|y|)))(\bullet)^\top + \\ & (\theta(\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u|)) + (1-\theta)(\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|v|)))(\bullet)^\top \end{aligned} \quad (4.16)$$

Em seguida, denote $w := \theta|x| + (1-\theta)|y|$ e $w' := |\theta x + (1-\theta)y|$. Então, segue que $\text{diag}(w) - \text{diag}(w') \succeq 0$, visto que $\theta|x_i| + (1-\theta)|y_i| \geq |\theta x_i + (1-\theta)y_i|$ pela desigualdade triangular. Ainda, $(\theta \text{diag}(|x|) + (1-\theta)\text{diag}(|y|))(\bullet)^\top = \text{diag}(w)^2$, e consequentemente $\text{diag}(w)^2 - \text{diag}(w')^2 \succeq 0$. Agora, calculando a forma simétrica dependente de x e y em (4.16), tem-se

$$\begin{aligned} & (\theta(\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x|)) + (1-\theta)(\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|y|)))(\bullet)^\top \\ & = (\sigma_x + \bar{\sigma}_x(\theta \text{diag}(|x|) + (1-\theta) \text{diag}(|y|)))(\bullet)^\top \\ & = (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(\theta|x| + (1-\theta)|y|))(\bullet)^\top = (\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w))(\bullet)^\top \\ & = \sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_x \text{diag}(w) \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w) \sigma_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w)^2 \bar{\sigma}_x^\top \end{aligned} \quad (4.17)$$

Neste ponto, introduzindo as condições de positividade (4.18),

$$\sigma_x \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \sigma_x^\top \succeq 0 \quad \sigma_u \bar{\sigma}_u^\top + \bar{\sigma}_u \sigma_u^\top \succeq 0 \quad (4.18)$$

obtem-se por conseguinte a desigualdade desejada

$$\begin{aligned} & \sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_x \text{diag}(w) \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w) \sigma_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w)^2 \bar{\sigma}_x^\top \\ & - [\sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_x \text{diag}(w') \bar{\sigma}_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w') \sigma_x^\top + \bar{\sigma}_x \text{diag}(w')^2 \bar{\sigma}_x^\top] \succeq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ademais, a parcela em (4.16) envolvendo u e v pode ser analisada de modo análogo ao que foi mostrado acima. À vista disso, mostra-se a validade de (4.15), i.e., pode-se invocar o Lema 4.1 e avaliar da otimalidade que:

$$\begin{aligned} J^*(\vartheta) &= \inf_{\pi \in \Pi} E_{\vartheta_0}^\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(\vartheta_k, u_k) + g(\vartheta_N) \right] \\ &\leq E_{\vartheta_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(\vartheta_k, u_k^\vartheta) + g(\vartheta_N) \right] \\ &\leq E_{z_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} f(z_k, u_k^z) + g(z_N) \right] \\ &= \theta J(x) + (1-\theta) J(y) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Em suma, note que caso f e g forem estritamente convexas, as desigualdades acima serão restritas. Com isso, conclui-se a convexidade da função valor e a prova do Teorema 4.1 está completa. \square

Tendo alcançado este importante resultado, procura-se determinar a sequência de controles que minimiza o custo total incorrido $J_0^*(x)$. Observe, contudo, que o valor absoluto do vetor de controles u aparece em (4.5) através de (3.3), o que contribui para que a função valor seja não diferenciável com respeito a u na origem. Diante disso, o procedimento adequado de minimização é feito por subdiferenciais ao analisar

$$0 \in \partial_u J_k(x, u) \Big|_{u=u^*} = \partial_u c(x, u) \Big|_{u=u^*} + \partial_u J_{k+1}(h(x, u, \xi)) \partial_u h(x, u, \xi) \Big|_{u=u^*} \quad (4.21)$$

Em face da expressão acima, note que se faz necessário determinar previamente o sinal de cada entrada do vetor de controle ótimo u^* antes mesmo de determinar a magnitude do controle em si. Nesse sentido, seja uma função $g : \mathbb{R}^n \xrightarrow[x_i \mapsto |x_i|]{} \mathbb{R}^n$. Então define-se o operador $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \{-1, 0, 1\}^n$ cuja

$$\mathcal{S}_i(g_i(x)) = \begin{cases} \partial|x_i|, & \text{se } x_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } 0 \in \partial|x_i| \end{cases} \quad (4.22)$$

é a i -ésima entrada do vetor $\mathcal{S}(g(x))$ e corresponde ao sinal de $g_i(x)$.

Lema 4.2. *Sejam c e f funções de custo não negativas e convexas. Então, o controle ótimo satisfaz, em cada estágio $k \in [0, N)$, as seguintes condições de sinais:*

$$\begin{cases} u_i^* > 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_i^+ \\ u_i^* < 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_i^- \\ u_i^* = 0, & \text{se } x \in \mathcal{R}_i^0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_i^+ &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u_i \downarrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) < 0\} \\ \mathcal{R}_i^- &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u_i \uparrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) > 0\} \\ \mathcal{R}_i^0 &:= \{x \in \mathbb{R}^n : (\mathcal{R}_i^+ \cup \mathcal{R}_i^-)^c\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Demonstração do Lema 4.2. O importante resultado garantido pelo Teorema 4.1, cancela a convexidade da Função Valor $J_k^*(x)$. Uma consequência imediata deste resultado é a monotonicidade que se obtém para $u \rightarrow \partial_u J_k(x, u)$. Em outras palavras, tem-se que se $\nu_1 \leq \nu_2$, então para todo ζ_1, ζ_2 tal que

$$\zeta_1 \in \partial_{u_i} J(x, u) \Big|_{u_i=\nu_1} \text{ e } \zeta_2 \in \partial_{u_i} J(x, u) \Big|_{u_i=\nu_2} \quad (4.24)$$

tem-se que $\zeta_1 \leq \zeta_2$. Em virtude disso, pode-se avaliar o sinal do controle ótimo u_i^* por vias do conjunto subdiferencial

$$\mathbb{S}_0 := \partial_{u_i} J(x, u) \Big|_{u_i=0}$$

1. \mathcal{R}_i^+ : se $\zeta < 0 \forall \zeta \in \mathbb{S}_0$ então $u_i \rightarrow J(x, u)$ é decrescente em $u_i^* = 0$ e o mínimo é atingido no semiplano positivo $u_i^* > 0$.
2. \mathcal{R}_i^- : se $\zeta > 0 \forall \zeta \in \mathbb{S}_0$ então $u_i \rightarrow J(x, u)$ é crescente em $u_i^* = 0$ e o mínimo é atingido no semiplano negativo $u_i^* < 0$.
3. \mathcal{R}_i^0 : se $\zeta = 0 \in \mathbb{S}_0$ então o mínimo é atingido na origem $u_i^* = 0$.

Logo, as três regiões são determinadas, para cada x , pelo sinal dos valores extremos de $\partial_{u_i} J(x, u)|_{u_i=0}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \lim_{u_i \downarrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) &= \max \partial_{u_i} J(x, u)|_{u_i=0} \\ \lim_{u_i \uparrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) &= \min \partial_{u_i} J(x, u)|_{u_i=0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note que os limites em (4.25) são definidos, pela aplicação do subdiferencial do custo com respeito a u_i , sobre os valores $\{+1\}$, $\{-1\}$ ou sobre o intervalo real fechado $[-1, 1]$. Portanto, as regiões em questão podem ser determinadas como apresentadas em (4.23) no lema. \square

4.1.2 A região de inação

Tendo alcançado essa importante caracterização para as três regiões distintas que compõem o espaço de estados, em se tratando de sistemas CVIU, o próximo passo lógico consiste em iniciar uma investigação detalhada do problema de controle pela inação, visto que se conhece *a priori* o controle ótimo nesta região. O Lema 4.2 identifica regiões $\mathcal{R}_i^0 \in \mathbb{R}^n$ dentro das quais a ação ótima de controle é $u_i^* \equiv 0$, logo o nome *região de inação* relativa à i -ésima entrada do vetor de controle u^* . Recorde que, fazer $u_i^* \equiv 0$, não equivale a aplicar uma entrada de controle nula. Pelo fato do modelo CVIU ser formulado como um problema de regulação (vide Seção 3.1), pode-se afirmar que $u_i^*(x) \equiv 0, \forall x \in \mathcal{R}_i^0$ é a ação de controle ótima que resulta em variação zero com respeito ao controle nominal no equilíbrio.

Posto isso, vide Lema 4.2 e observe que cada região \mathcal{R}_i^0 , $i = 1, 2, \dots, m$ pode ser expressa de maneira similar pelas desigualdades

$$\mathcal{R}_i^0 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{u_i \uparrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) \leq 0 \leq \lim_{u_i \downarrow 0} \partial_{u_i} J(x, u) \right\} \quad (4.26)$$

Em vista disso, introduz-se também o conceito de inação global, denotada \mathcal{R}^0 . A inação global corresponde à região formada pela interseção de todas as regiões \mathcal{R}_i^0 , isto é, $\mathcal{R}^0 := \cap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0$. Dessa forma, por construção, a região de inação global corresponde à região do espaço de estados dentro da qual a ação de controle ótima é o vetor nulo $u^* \equiv 0$.

Comentário 4.1. Neste momento, poderia-se levantar um questionamento sobre a possibilidade de degeneração da i -ésima região de inação. Isto é, poderiam as regiões \mathcal{R}_i^+ e \mathcal{R}_i^- serem tais que \mathcal{R}_i^0 é degenerada? Este argumento será retomado posteriormente quando da consideração do problema de controle CVIU particular no qual a função de custo tem forma quadrática em um horizonte infinito de controle.

4.2 Horizonte infinito e custo quadrático descontado

No que se segue, o intuito deste trabalho é de explorar a convexidade da Função Valor garantida pelo Teorema 4.1 e investigar a existência de uma política de controle CVIU ótima em um horizonte infinito de planejamento no caso particular onde a função de custo é quadrática e descontada. A solução do problema de controle ótimo a longo prazo é de grande interesse visto que, na grande maioria das aplicações em teoria de controle, não há uma ação terminal bem definida. Isto é, o objetivo é determinar uma política que minimize um funcional de custo em valor esperado ao longo de um número qualquer de estágios, inclusive *ad infinitum*.

Neste sentido, inicia-se a formulação do problema de controle ótimo em horizonte infinito por especificar a função de custo por estágio $c(x, u)$ como sendo uma função quadrática para algum $Q \succeq 0$, $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $R \succ 0$ de dimensões compatíveis. Desse modo, redefine-se o funcional de custo, nesta conjuntura, expresso via valor esperado de um custo corrente com desconto e dado por

$$J_0^*(x) := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\pi \in \Pi} E_x^\pi \left[\sum_{k=0}^N \alpha^k z_k^\top O z_k \right], \quad 0 \leq \alpha < 1, x_0 = x \quad (4.27)$$

em que,

$$z_k := \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad O := \begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad Q - NR^{-1}N^\top \succeq 0 \quad (4.28)$$

No que diz respeito a problemas de controle em horizonte infinito de planejamento, introduz-se um fator de desconto α que, associado a uma classe de políticas de controle estabilizantes, dê origem a um custo finito. Uma interpretação bastante intuitiva para esse fator de desconto é o de limiar de visão do tomador de decisão. No caso limite quando $\alpha \rightarrow 0$, o tomador de decisão tem visão extremamente curta (preferência por ganhos a curto prazo) e o custo incorrido sofrerá, tão somente, a influência do primeiro estágio ao passo que se o desconto é escolhido $0 < \alpha < 1$, o tomador de decisão enxerga um horizonte mais distante no futuro e os estágios mais a frente contribuem com algum impacto no custo total incorrido.

Todavia, um grande impasse quando da tratativa de problemas em horizonte infinito é que, *a priori*, o algoritmo da PD deveria ser iniciado do estágio $k = \infty$ e, somente após infinitas iterações sucessivas, obter-se-ia o cômputo de $J_0^*(x)$. Uma estratégia que permite o escape desse imbróglio é a utilização da equação de Bellman conjuntamente com uma mudança notacional que reverte a direção dos índices dos estágios da PD. Suponha um problema similar ao posto em (4.27). Todavia, considere um horizonte finito de N estágios. Então, a função valor k estágios anteriores ao final do horizonte ($k < N$) é dada por

$$J_{N-k}^*(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(x)} \left\{ E \left[\alpha^{N-k} c(x, u) + J_{N-k+1}^*(h(x, u, \zeta)) \right] \right\} \quad (4.29)$$

Neste momento, considere a mudança notacional $V_k^*(x) = \alpha^{N-k} J_{N-k}^*(x)$. Esta mudança reverte a direção dos índices em (4.29) e faz com que a equação de Bellman assumam a forma

$$V_k^*(x) = \inf_{u \in \mathcal{U}(x)} \left\{ E \left[c(x, u) + \alpha V_{k-1}^*(h(x, u, \xi)) \right] \right\} \quad (4.30)$$

com a importante propriedade que (4.30) pode ser naturalmente estendida para abarcar o caso de horizonte infinito. Observe que, quando $k \rightarrow \infty$ em (4.30), $V_k(x) \rightarrow J_0^*(x)$ em (4.27). De resto, note que quando o problema de controle em horizonte infinito é bem definido, a função valor herda convexidade do caso em horizonte finito. Essa asserção se dá como resultado de um argumento de indução que pode ser desenvolvido utilizando-se (4.30) e a propriedade descrita pela Proposição 2.4, a qual enuncia que somas infinitas, ponderadas e não negativas de funções convexas preservam convexidade.

Comentário 4.2. *Por fim, é manifesto que a equação de Bellman (4.30) se coloca como um problema de muito maior tratabilidade que (4.27). Note que o problema de controle como apresentado em (4.27) requer uma otimização sobre a classe de todas políticas admissíveis Π . O algoritmo da PD, em contrapartida, decompõe o problema em uma sequência de minimizações a serem tomadas sobre o conjunto de controles admissíveis $\mathcal{U}(x)$. Daí a importância da PD na solução de problemas de controle ótimo tanto pela tratabilidade Matemática quanto pela obtenção natural de políticas de controle em forma de realimentação de estados.*

4.2.1 Solução dentro da região de inação

Neste ponto, tomam-se como interesse as regiões \mathcal{R}_i^0 que compõem a região de inação global $\mathcal{R}^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \cap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0\}$ para o problema de controle em horizonte infinito com desconto.

Note que a função de custo por estágio $z^\top O z$ é diferenciável em $(0, 0)$ e, concomitantemente, por força do Teorema 4.1, a função valor $V^*(x)$ é convexa. Neste caso, por simetria, segue-se que o mínimo é incorrido na origem e, portanto, no interior da região de inação global \mathcal{R}^0 . Tendo essa observação em mente, uma estratégia bastante razoável é a de iniciar a busca pela solução de (4.27) em uma vizinhança de um ponto x_0 qualquer contido em \mathcal{R}^0 , dado que a função custo por estágio escolhida é quadrática e o comportamento de $V^*(x)$ é conhecido. Com o intuito de se obter uma solução do problema de controle válida na inação global, considere o Lema 4.3.

Antes de prosseguir, introduzem-se algumas notações importantes para o desenvolvimento que se segue. Para uma matriz $Y \succeq 0$, definem-se os operadores a seguir

$$\begin{aligned}
\Delta_x(Y) &= \text{Diag}(\sigma_x^\top Y \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x^\top Y \sigma_x) & \Delta_u(Y) &= \text{Diag}(\sigma_u^\top Y \bar{\sigma}_u + \bar{\sigma}_u^\top Y \sigma_u) \\
\Lambda_x(Y) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x) & \Lambda_u(Y) &= \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top Y \bar{\sigma}_u) \\
\tilde{Q}(Y) &= Q + \alpha \Lambda_x(Y) & \tilde{R}(Y) &= R + \alpha \Lambda_u(Y) \\
\Sigma(Y) &= \alpha B^\top Y A + N^\top & \Omega(Y) &= \alpha B^\top Y B + \tilde{R}(Y) \\
\Gamma(Y) &= \text{tr}(Y(\sigma \sigma^\top + \sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_u \sigma_u^\top))
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Em caráter complementar, recordam-se algumas propriedades de grande valia que envolvem o operador traço. Sejam $M \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ e $v \in \mathbb{R}^\ell$. Então,

$$\begin{aligned}
\text{tr}(M \text{diag}(|v|)^2) &= v^\top \text{Diag}(M) v \\
\text{tr}(M \text{diag}(|v|)) &= \mathcal{S}(v)^\top \text{Diag}(M) v \\
v^\top M v &= \text{tr}(M v v^\top)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Lema 4.3. *Considere o problema de controle ótimo em horizonte infinito e com custo descontado como apresentado em (4.27), bem como a equação a tempo discreto tipo Lyapunov*

$$\alpha A^\top Y A - Y + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x) + Q = 0 \tag{4.33}$$

Se existir uma solução única e semidefinida positiva $Y \succeq 0$ para (4.33), a Função Valor para cada $x \in \mathcal{R}^0 = \cap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^0$ será dada por

$$V^*(x) = x^\top Y x + \gamma_0^\top x + c_0 \tag{4.34a}$$

onde γ_0 e c_0 satisfazem

$$\gamma_0^\top = \alpha \mathcal{S}(x)^\top \Delta_x(Y) (I - \alpha A)^{-1} \tag{4.34b}$$

$$c_0 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \Gamma(Y) \tag{4.34c}$$

Outrossim, a inação global \mathcal{R}^0 é a região contida entre os hiperplanos paralelos e simétricos em relação à origem, descritos por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left\langle B_i, (\alpha Y A + N^\top) x + \frac{\alpha}{2} B^\top \gamma_0 \right\rangle = 0 \right\} \tag{4.35}$$

Demonstração do Lema 4.3. Fundamentado sobre a convexidade de $V^*(x)$ e o resultado devido ao Teorema de Alexandrov (NICULESCU; PERSSON, 2006, Teorema: 3.11.2 pg. 154) que assevera que toda função convexa é duas vezes diferenciável em quase todo ponto, propõe-se uma aproximação quadrática para $V^*(x)$ com validade restrita a uma vizinhança de algum ponto $x_0 \in \mathcal{R}^0$. Nesse sentido, admita uma subsequência convergente $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com cada ζ_j um ponto de Alexandrov da função $V^*(x)$, com $\zeta_j \rightarrow x_0$. Então, considerando a aproximação quadrática para a função valor $V^*(x)$ em uma vizinhança de x_0 , para algum $\epsilon > 0$ e j suficientemente grande, obtida pelo polinômio de Taylor de segunda ordem expresso por

$$\left| V^*(x) - \left(\frac{1}{2} (x - x_0)^\top V_{xx}^*(\zeta_j) (x - x_0) + \left\langle V_x^*(\zeta_j), x - x_0 \right\rangle + V^*(\zeta_j) \right) \right| < \epsilon \tag{4.36}$$

salvaguardado que $x, x_0 \in \mathcal{R}^0$ e $\|x - x_0\| < \delta = \delta(\epsilon)$.

Então, considerando um ponto x na vizinhança de x_0 como discutido acima e, sabendo que $u^* = \arg \inf_{u \in \mathcal{U}(x)}(\cdot) = 0$ por definição da região \mathcal{R}^0 , ao substituir a aproximação (4.36) na equação da PD (4.30), pode-se dizer que

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2}(x_k - x_0)^\top V_{xx}^*(\zeta_j)(x_k - x_0) + \langle V_x^*(\zeta_j), x_k - x_0 \rangle + V^*(\zeta_j) \right) + x_k^\top Q x_k \\ & + E \left[\alpha \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_0)^\top V_{xx}^*(\zeta_j)(x_{k+1} - x_0) + \langle \alpha V_x^*(\zeta_j), x_{k+1} - x_0 \rangle + \alpha V^*(\zeta_j) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

é limitada superior e inferiormente por $\pm \nu(\epsilon)$, com $\nu(\epsilon) \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Dessa forma, rearranjando a expressão (4.37), substituindo a dinâmica CVIU e tomando o valor esperado da expressão resultante, após sucessivas manipulações algébricas, tem-se que, para $x_k = x$, (4.37) pode ser expressa por

$$\begin{aligned} & x^\top \left(\frac{\alpha}{2} A^\top V_{xx}^*(\zeta_j) A + Q + \frac{\alpha}{2} \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top V_{xx}^*(\zeta_j) \bar{\sigma}_x) \right) x \\ & + \left(\alpha x_0^\top V_{xx}^*(\zeta_j) A + \frac{\alpha}{2} \mathcal{S}(x)^\top \text{Diag}(\sigma_x^\top V_{xx}^*(\zeta_j) \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x V_{xx}^*(\zeta_j) \sigma_x) + \alpha V_x^*(\zeta_j)^\top A \right) x \\ & + \frac{\alpha}{2} \text{tr}(V_{xx}^*(\zeta_j)(\sigma \sigma^\top + \sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_u \sigma_u^\top)) + \frac{\alpha}{2} x_0^\top V_{xx}^*(\zeta_j) x_0 - \alpha V_x^*(\zeta_j)^\top x_0 + \alpha V_x^*(\zeta_j) \\ & - \frac{1}{2}(x - x_0)^\top V_{xx}^*(\zeta_j)(x - x_0) - \langle V_x^*(\zeta_j), x - x_0 \rangle - V^*(\zeta_j) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Em seguida, tendo em mente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, toma-se o limite sobre $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ na expressão acima e fazem-se as escolhas $V_{xx}^*(x_0) = 2Y$ e $V_x^*(x_0) = \gamma_0$. Assim sendo, (4.38) reescreve-se

$$\begin{aligned} & x^\top (\alpha A^\top Y A + Q + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x)) x \\ & + (2\alpha x_0^\top Y A + \alpha \mathcal{S}(x)^\top \text{Diag}(\sigma_x^\top Y \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x^\top Y \sigma_x) + \alpha \gamma_0^\top A) x \\ & + \alpha \Gamma(Y) + \alpha x_0^\top Y x_0 - \alpha \gamma_0^\top x_0 + \alpha V^*(x_0) - ((x - x_0)^\top Y (x - x_0) + \gamma_0^\top (x - x_0) + V^*(x_0)) \end{aligned}$$

À luz da equação anterior, suponha que $\alpha A^\top Y A + Q + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x) - Y = 0$ tenha solução única semidefinida positiva $Y \succeq 0$. Então, pode-se zerar o Hamiltoniano por uma escolha apropriada para γ_0^\top e assim obter o valor correspondente para $V^*(x_0)$. Essa estratégia fornece a seguinte representação quadrática para a função valor

$$V^*(x) = (x - x_0)^\top Y (x - x_0) + \gamma_0^\top (x - x_0) + \frac{\alpha \Gamma(Y)}{1 - \alpha} + \gamma_0^\top x_0 - x_0^\top Y x_0 \quad (4.39)$$

que é válida para cada $x \in \mathcal{R}^0$ em uma vizinhança de um ponto x_0 também contido na inação global. Nesta situação, a equação de Bellman (4.30) com custo quadrático e especializado para a região \mathcal{R}^0 em (4.37), apresenta solução estacionária $V^*(x)$ dada por (4.39), parametrizada por Y , γ_0^\top e $V^*(x_0)$ dados por

$$Y = \alpha A^\top Y A + \tilde{Q}(Y) \quad (4.40a)$$

$$\gamma_0^\top (I - \alpha A) = 2x_0^\top Y (I - \alpha A) + \alpha \mathcal{S}(x)^\top \Delta_x(Y) \quad (4.40b)$$

$$V^*(x_0)(1 - \alpha) = \alpha \Gamma(Y) + (1 - \alpha) \gamma_0^\top x_0 - (1 - \alpha) x_0^\top Y x_0 \quad (4.40c)$$

Note que é possível zerar o Hamiltoniano independente de x_0 , de modo a escolha do ponto x_0 pode ser feita de modo arbitrário, desde que esteja contido em \mathcal{R}^0 . Então, fazendo $x_0 \rightarrow 0$, obtêm-se de imediato as expressões enunciadas no lema.

Por fim, o procedimento para derivar os planos que compõem a fronteira da região de inação global \mathcal{R}^0 , consiste em escrever o Hamiltoniano na inação global em forma expandida, incluindo os termos em u , obtendo-se assim

$$\begin{aligned} V^*(x) \Big|_{x \in \mathcal{R}^0} = & \inf_{u \in \mathcal{U}(x)} \left\{ u^\top \Omega(Y) u + 2x^\top (\alpha A^\top Y B + N) u + (\alpha \gamma_0^\top B + \alpha \mathcal{S}(u)^\top \Delta_u(Y)) u \right\} \\ & + x^\top (\alpha A^\top Y A + \tilde{Q}(Y)) x + (\alpha \gamma_0^\top A + \alpha \mathcal{S}(x)^\top \Delta_x(Y)) x + \alpha (\Gamma(Y) + c_0) \end{aligned} \quad (4.41)$$

e, pela definição da região de inação (4.26), tem-se

$$u^* \Big|_{u=0} = -\Omega(Y)^{-1} \left((\alpha B^\top Y A + N^\top) x + \frac{\alpha}{2} (B^\top \gamma_0 + \text{Diag}(\sigma_u^\top Y \bar{\sigma}_u + \bar{\sigma}_u^\top Y \sigma_u) \mathcal{S}(u)) \right) \quad (4.42)$$

Logo, os i -ésimos hiperplanos formadores da inação global e que definem as porções de $\mathcal{R}_i^0 \subset \mathcal{R}^0$, serão dados por

$$\left\langle B_i, (\alpha Y A + N^\top) x + \frac{\alpha}{2} \gamma_0 \right\rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.43)$$

uma vez que $x \in \mathcal{R}^0$ e, por conseguinte, $u \equiv \mathcal{S}(u) \equiv 0$. Assim, o lema está provado. \square

Comentário 4.3. *Atente-se para a associação da função valor (4.34a) válida dentro da região de inação global \mathcal{R}^0 com a solução da equação discreta de Lyapunov linearmente perturbada (4.33). Métodos para solução dessa equação serão tratados posteriormente na Seção 4.3. Além disso, o parâmetro γ_0^\top pode ser calculado isoladamente ao pós-multiplicar (4.40b) pelo termo $(I - \alpha A)^{-1}$. Note que essa inversa existirá sempre que αA resultar em uma matriz discreta Schur estável.*

Comentário 4.4. *Uma análise cuidadosa da equação discreta tipo Lyapunov (4.33) permite que se atinja a sutil conclusão de que a parcela $\Lambda_x(Y)$ aumenta o raio espectral da matriz da dinâmica A e, dessa forma, contabiliza a incerteza que incide sobre essa matriz. A título de exemplo, considere a equação (4.33) correspondente ao caso SISO. Neste caso particular, a equação discreta tipo Lyapunov toma forma $\alpha(A^2 + \bar{\sigma}_x^2)Y - Y + Q = 0$. Claramente, este exemplo constata a observação levantada por este comentário.*

Comentário 4.5. *Recorde que a região de inação global \mathcal{R}^0 é formada pela interseção entre as regiões \mathcal{R}_i^0 , de modo que estas regiões \mathcal{R}_i^0 não se restringem à inação global, mas estendem-se indefinidamente ao longo do espaço de estados. Tendo isso em mente, perceba como a análise dos limites da inação global fornece importante discernimento sobre o comportamento das fronteiras de cada \mathcal{R}_i^0 que se prolongam, indefinidamente, a partir*

da inação global. Da equação (4.42), tem-se que as fronteiras de uma região \mathcal{R}_i^0 , válida para regiões exteriores à \mathcal{R}^0 , é dado por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{R}^0\} : \left\langle \Omega(Y)_i^{-1}, \Sigma(Y)x + \frac{\alpha}{2} (B^\top \gamma + \Delta_u(Y)\mathcal{S}(u)) \right\rangle = 0 \right\} \quad (4.44)$$

para algum par Y, γ diferente dos calculados em (4.40), posto que neste caso se tratam de regiões exteriores à \mathcal{R}^0 onde as soluções do Lema 4.3 não valem. Entretanto, note que, de forma análoga às fronteiras da inação global (4.35), observa-se em (4.44) um caráter de simetria das fronteiras de cada região \mathcal{R}_i^0 .

Em caráter complementar, ressalta-se a relação de dependência entre as fronteiras de uma região \mathcal{R}_i^0 e os sinais das demais entradas do vetor de controle. Note que essa dependência emerge do acoplamento dado pela inversa de $\Omega(Y)$ e o vetor de sinais $\mathcal{S}(u)$ em (4.44). Ademais, note que o caso monoentrada não impõe nenhuma dificuldade em determinar os limites da única região de inação, que por ser única, também é global. Neste caso particular, como o custo ótimo (4.34a) vale por toda a extensão desta única inação, sua fronteira pode ser analiticamente determinada e vale ao longo de todo o espaço de estados.

Comentário 4.6. Por último, faz-se referência à indagação levantada pelo Comentário 4.1 sobre a possibilidade da i -ésima região de inação ser degenerada. No caso particular tratado nesta seção (custo quadrático com desconto em horizonte infinito), observe que \mathcal{R}_i^0 não se degenera. Note de (4.43), expressão que descreve as fronteiras que compõem a porção de $\mathcal{R}_i^0 \subset \mathcal{R}^0$, que se a equação tipo Lyapunov (4.33) admite solução $Y \succeq 0$, então o termo γ_0 que define a translação linear (afastamento) entre os hiperplanos que definem as fronteiras da variedade \mathcal{R}_i^0 imersa em \mathbb{R}^n é tal que $\gamma_0 \neq 0$.

De mesmo modo, da expressão (4.44) que descreve as fronteiras de cada \mathcal{R}_i^0 nos seguimentos exteriores à \mathcal{R}^0 , tem-se que para algum par $Y \succeq 0$, $\gamma \neq 0$, o termo independente não é nulo. Ademais, verifica-se uma conexão entre as matrizes σ_u , $\bar{\sigma}_u$ e a separação entre as fronteiras nestas regiões, definindo-se assim o que pode ser retradado como “tamanho da inação”.

4.2.2 Soluções assintóticas

Na subseção anterior, obteve-se a solução ótima para o problema de controle com custo quadrático descontado (4.27) válida dentro da região de inação global. Aludiu-se também ao comportamento das regiões de inação \mathcal{R}_i^0 correspondentes a cada i -ésima entrada do vetor de controle. O Comentário 4.5 traz a expressão (4.44) que descreve as fronteiras de cada região \mathcal{R}_i^0 . Estas fronteiras, caracterizadas hiperplanos em \mathbb{R}^n , apresentam simetria e, por suas vezes dividem o espaço de estados em regiões disjuntas dentro das quais o controle ótimo é não nulo, i.e., $\mathcal{R}_i^+(u_i^* > 0)$ e $\mathcal{R}_i^-(u_i^* < 0)$.

Dito isso, esta Seção se ocupa em lidar com o controle ótimo nas regiões \mathcal{R}_i^+ e \mathcal{R}_i^- quando o estado está suficientemente afastado de cada região \mathcal{R}_i^0 . Mais ainda, todas as entradas do controle ótimo são não nulas, i.e., $u_i^* \neq 0 \forall i$. Com esse propósito, para algum $x \in \mathbb{R}^n$ considere a distância $d_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_i(x) := \begin{cases} \inf \|x - y\| : y \in \mathcal{R}_i^0 \\ \|x\|, \text{ se } \mathcal{R}_i^0 = \emptyset \end{cases} \quad (4.45)$$

Observe de (4.45) que quando $d_i(x)$ é suficientemente grande, tratam-se de regiões no espaço de estados dentro das quais o sinal de controle ótimo é necessariamente $u_i^* > 0$ ou $u_i^* < 0$ e este permanece inalterado em uma região considerável contendo o ponto x . Com o objetivo de determinar a solução do problema de controle (4.27) nestas regiões de controles não nulos, definem-se os seguintes conjuntos para $i = 1, \dots, m$ e algum $\ell \geq 0$.

$$\mathcal{T}_i^+(\ell) = \mathcal{T}_i^{s_i=+1} := \left\{ x \in \mathcal{R}_i^+ : \min_{1 \leq j \leq m} d_j(x) \geq \ell \right\} \quad (4.46a)$$

$$\mathcal{T}_i^-(\ell) = \mathcal{T}_i^{s_i=-1} := \left\{ x \in \mathcal{R}_i^- : \min_{1 \leq j \leq m} d_j(x) \geq \ell \right\} \quad (4.46b)$$

$$\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell) := \cap_{i=1}^m \mathcal{T}_i^{s_i}(\ell) \quad (4.46c)$$

tal que $\bar{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_m]^\top$ e cada s_i toma valores sobre os *singletons* $\{-1, +1\}$ para cada $\mathcal{T}_i^-, \mathcal{T}_i^+$ respectivamente. Seja \mathbf{S} o conjunto de todos \bar{s} (possíveis combinações de s_i). Não deve-se deixar passar despercebido que $\mathcal{S}(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{S}$ como definido em (4.22) e, uma vez que $n \geq m$, as regiões $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ são não-vazias para cada \bar{s} . De fato, para um $\bar{s} \in \mathbf{S}$ fixo, assume-se que $\mathcal{S}(u) = \bar{s}$ corresponde ao vetor de sinais para um controle de entradas não nulas em $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell) \subset \mathbb{R}^n$ para algum $\ell \geq 0$ suficientemente grande. Sob essa consideração, procura-se uma solução estacionária para (4.27) nas regiões assintóticas $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ quando $\ell \rightarrow \infty$.

Lema 4.4. *Considere o problema de controle em horizonte infinito com custo quadrático descontado (4.27) e a equação algébrica racional de Riccati*

$$\alpha A^\top Y A - Y - \Sigma(Y)^\top \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y) + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x) + Q = 0 \quad (4.47)$$

com $\Sigma(Y)$ e $\Omega(Y)$ como apresentados em (4.31). Caso exista uma solução única e positiva semidefinida $Y \succeq 0$ para (4.47), em regiões do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n onde $\mathcal{S}(u) = \bar{s}$ corresponde ao vetor de sinais do controle ótimo, então a função valor $V^*(x)$ tende assintoticamente para $V_a^{\bar{s}}(x)$ para todo x ponto interior de $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ quando $\ell \rightarrow \infty$, com

$$V_a^{\bar{s}}(x) = x^\top Y x + \langle \gamma_\infty(\bar{s}), x \rangle + c_\infty(\bar{s}) \quad (4.48)$$

tal que γ_∞ e c_∞ satisfazem

$$\gamma_\infty^\top(\bar{s}) \left(I - \alpha A + \alpha B \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y) \right) = \alpha \left(\mathcal{S}(x)^\top \Delta_x(Y) - \bar{s}^\top \Delta_u(Y) \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y) \right) \quad (4.49a)$$

$$c_\infty(\bar{s}) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\Gamma(Y) - \frac{\alpha}{4} g(\bar{s})^\top \Omega(Y)^{-1} g(\bar{s}) \right), \quad g(\bar{s}) := B^\top \gamma_\infty(\bar{s}) + \Delta_u^\top(Y) \bar{s} \quad (4.49b)$$

Ademais, no interior de $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$, a política de controle ótima u^* tende de maneira assintótica, quando $\ell \rightarrow \infty$, para a forma afim de realimentação de estados

$$u^*(x) = -\Omega(Y)^{-1} \left(\Sigma(Y)x + \frac{\alpha}{2}g(\bar{s}) \right) \quad (4.49c)$$

Demonstração do Lema 4.4. Considere os conjuntos $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell) \subset \mathbb{R}^n$, para ℓ suficientemente grande e $\mathcal{S}(u) = \bar{s}$ para algum $\bar{s} \in \mathbf{S}$. De maneira similar à análise prévia concernente a região de inação global \mathcal{R}^0 , propõe-se o teste de uma aproximação quadrática por partes para a função valor $V^*(x)$, sempre que $x \in \mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$. Sob essa conjectura, a fim de buscar uma solução estacionária para a equação de Bellman, seja a seguinte solução candidata em forma quadrática $V^a(x) = x^\top Y x + \gamma(\bar{s})^\top x + c(\bar{s})$. Daí,

$$V^*(x) \leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{U}(x) \\ \mathcal{S}(u) = \bar{s}}} \left\{ E \left[x^\top Q x + 2x^\top N u + u^\top R u \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \left(x_{k+1}^\top Y x_{k+1} + \langle \gamma(\bar{s}), x_{k+1} \rangle + c(\bar{s}) \right) \right] \right\} \quad (4.50)$$

para $x_k = x$ e $u_k = u$.

Além disso, observando o fato de que todos os vetores de ruído envolvidos são sequências de variáveis aleatórias de média zero e mutualmente descorrelacionados, a inequação (4.50) pode ser equivalentemente escrita como

$$V^*(x) \leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{U}(x) \\ \mathcal{S}(u) = \bar{s}}} \left\{ u^\top (\alpha B^\top Y B + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_u^\top Y \bar{\sigma}_u) + R) u + 2x^\top (\alpha A^\top Y B + N) u \right. \\ \left. + (\alpha \bar{s}^\top \text{Diag}(\sigma_u^\top Y \bar{\sigma}_u + \bar{\sigma}_u^\top Y \sigma_u) + \alpha \gamma(\bar{s})^\top B) u \right\} \quad (4.51) \\ + x^\top (\alpha A^\top Y A + \alpha \text{Diag}(\bar{\sigma}_x^\top Y \bar{\sigma}_x) + Q) x \\ + (\alpha \mathcal{S}(x)^\top \text{Diag}(\sigma_x^\top Y \bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_x^\top Y \sigma_x) + \alpha \gamma(\bar{s})^\top A) x \\ + \alpha \text{tr}(Y (\sigma \sigma^\top + \sigma_x \sigma_x^\top + \sigma_u \sigma_u^\top)) + \alpha c(\bar{s})$$

Lançando mão dos operadores previamente definidos em (4.31) e de mesmo modo, defina $g(\bar{s}) := B^\top \gamma(\bar{s}) + \Delta_u(Y)^\top \bar{s}$. Ao rearranjar os termos de (4.51) e, utilizando o artifício de completar quadrados, (4.51) pode ser analogamente expressa por

$$V^*(x) \leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{U}(x) \\ \mathcal{S}(u) = \bar{s}}} \left\{ \left(u + \Omega(Y)^{-1} \left(\Sigma(Y)x + \frac{\alpha}{2}g(\bar{s}) \right) \right)^\top \Omega(Y) \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} \right\} \\ - \left(\Sigma(Y)x + \frac{\alpha}{2}g(\bar{s}) \right)^\top \Omega(Y)^{-1} \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix} + x^\top (\alpha A^\top Y A + \tilde{Q}(Y)) x \\ + (\alpha \gamma_\infty^\top(\bar{s}) A + \alpha \mathcal{S}(x)^\top \Delta_x(Y)) x + \alpha (\Gamma(Y) + c_\infty) \quad (4.52)$$

Note que $\Omega(Y)$ é positiva definida e, por essa razão, sempre invertível. Ademais, segue trivialmente de (4.52) que o controle ótimo em (4.49c) incorre o custo mínimo no lado direito de (4.52).

Por outro lado, como a função teste $V^a(x) = x^\top Y x + \langle \gamma(\bar{s}), x \rangle + c(\bar{s})$ é uma tentativa de aproximação local para a função valor por vias de um polinômio de Taylor de segunda ordem, obtém-se a seguinte identidade envolvendo a referida função de teste

$$\begin{aligned} x^\top Y x + \langle \gamma(\bar{s}), x \rangle + c(\bar{s}) = & \\ & x^\top \left(\alpha A^\top Y A - \Sigma(Y)^\top \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y) + \tilde{Q}(Y) \right) x \\ & - \langle \alpha g, \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y) x \rangle + \langle \alpha \gamma_\infty(\bar{s}), Ax \rangle + \langle \alpha \mathcal{S}(x), \Delta_x(Y) x \rangle \\ & + \alpha \Gamma(Y) - \frac{\alpha^2}{4} g^\top M(Y)^{-1} g + \alpha c_\infty \end{aligned} \quad (4.53)$$

de modo tal que a equação de Bellman (4.50) é satisfeita com igualdade para $V^a(x)$ quando o controle ótimo é tomado como em (4.49c). Logo, $V^*(x) = V_a^{\bar{s}}(x)$ e, dessa forma, pode-se invocar o Teorema da Verificação para certificar-se de que o controle ótimo $u^*(x)$ de fato é dado por (4.49c) para todo $x \in \mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ quando $\ell \rightarrow \infty$. Isto posto, com este argumento a prova está encerrada. \square

Comentário 4.7. *Salienta-se o vínculo da função valor (4.48) válida nas regiões assintóticas $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell \rightarrow \infty)$ com a solução da equação algébrica racional de Riccati (4.47). Métodos para solução dessa equação serão subsequentemente discutidos na Seção 4.3. Uma ponderação de igual importância consiste em observar que o parâmetro $\gamma_\infty^1(\bar{s})$ é unicamente definido e pode ser calculado isoladamente ao pós-multiplicar (4.49a) por $(I - \alpha A + \alpha B \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y))^{-1}$. Note que este termo matricial é invertível sempre que (4.47) admite uma solução única $Y \succeq 0$. De fato, neste caso tem-se que a matriz ganho de Riccati $K = \Omega(Y)^{-1} \Sigma(Y)$ dará origem a um controle estabilizante de modo que a matriz do sistema em malha fechada $\alpha(A - BK)$ é Schur estável (todos autovalores estão alocados no interior do disco unitário). Portanto, $(I - \alpha[A - BK])$ será garantidamente invertível sempre que (4.47) admitir uma única solução estabilizante (condições para existência dessas soluções serão apresentadas na seção subsequente).*

Comentário 4.8. *Tal-qualmente posto pelo Comentário 4.4, desta feita, no que concerne a equação algébrica racional de Riccati (4.47), os termos $\Lambda_x(Y)$ e $\Lambda_u(Y)$ aumentam os raios espectrais de A e B respectivamente. Novamente, esta ocorrência é fruto da abordagem CVIU que se fundamenta sobre a premissa que as matrizes do sistema são incertas. Para maior clareza, considere o caso particular quando equação de Riccati (4.47) é escalar, $\alpha(A^2 + \bar{\sigma}_x^2)Y - Y - (\alpha BAY + N)^2(\alpha(B^2 + \bar{\sigma}_u^2)Y + R)^{-1} + Q = 0$. Notadamente, o caso SISO corrobora de maneira manifesta o ponto aludido neste comentário.*

Comentário 4.9. *Oportunamente neste momento, revisitam-se algumas noções acerca da região de inação a fim de apontar algumas observações e peculiaridades importantes da abordagem CVIU. No que tange ao modelo CVIU monoentrada, há evidentemente uma única região de inação, que por ser única, também é global. Neste caso particular, a*

inação global estende-se indefinidamente e está confinada entre planos paralelos, distintos e simétricos, precisamente descritos por (4.35).

No caso multidimensional, todavia, não se conhece de antemão como cada região \mathcal{R}_i^0 se comporta ao longo do espaço de estados. Pode-se determinar analiticamente as fronteiras de cada \mathcal{R}_i^0 por intermédio de (4.44) tão somente se os parâmetros Y, γ, c que definem o custo ótimo para cada estado $x \in X$ são conhecidos, o que não é o caso. Dessa forma, cada uma das regiões \mathcal{R}_i^0 estende-se indefinidamente a partir da inação global \mathcal{R}^0 e pelo fato de a função valor ser convexa, sempre há uma matriz (desconhecida) $Y \succeq 0$ tal que $Y = V_{xx}^*$. Por conseguinte, cada \mathcal{R}_i^0 tem fronteiras que não podem ser precisamente expressas, mas que determinam dois hiperplanos simetricamente separados entre si no espaço de estados.

Uma análise mais abrangente e que abarca o comportamento das regiões \mathcal{R}_i^0 ao longo de todo o espaço de estados, pode ser alcançada ao utilizar o método das aproximações estocásticas abordado em (NEREU, 2018) e estendido ao caso de dimensões superiores. O referido método explora o fato de o custo ótimo ser um mapa contínuo, consequência da convexidade da função valor, para gerar iterativamente aproximações para a função custo ótimo nas regiões intermediárias. O algoritmo responsável por essa aproximação fornece os parâmetros $\hat{Y}_k, \hat{\gamma}_k, \hat{c}_k$ que, por suas vezes, permitem a obtenção de uma aproximação tanto para o custo CVIU ótimo, bem como para a lei de controle nas regiões intermediárias. Um exemplo numérico desta abordagem é explorado posteriormente nesta dissertação no Capítulo 5.

4.3 Existência, unicidade e estabilizabilidade das soluções

Esta seção apresenta resultados e condições para existência e convergência das soluções para equações algébricas de Lyapunov e Riccati linearmente perturbadas que emergem na abordagem CVIU. Estas equações aparecem naturalmente na teoria de controle estocástico e são estudadas, dentre outros trabalhos, em (VAL *et al.*, 1998; FREILING; HOCHHAUS, 2003). Na primeira parte deste manuscrito, Capítulo 2, Seção 2.6 especificamente, mostrou-se que algumas propriedades das equações algébricas de Riccati e Lyapunov permanecem válidas para o caso mais geral que se manifesta no contexto CVIU. Estendem-se, por exemplo, os conceitos de estabilidade no sentido de Lyapunov, estabilizabilidade e detetabilidade.

Nesse sentido, no contexto CVIU, seja a equação algébrica de Riccati definida pelo operador racional $\mathcal{R} : D(\mathcal{R}) \rightarrow S^{n+}$, dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Y) = & \alpha A^\top Y A + Q + \alpha \Lambda_x(Y) - (\alpha B^\top Y A + N^\top)^\top \\ & \times (\alpha B^\top Y B + R + \alpha \Lambda_u(Y))^{-1} (\alpha B^\top Y A + N^\top) \end{aligned} \quad (4.54)$$

A seguir, define-se o operador $\Pi : S^{n+} \rightarrow S^{(n+m)+}$, que no caso CVIU é dado por

$$\Pi(Y) := \begin{bmatrix} \alpha\Lambda_x(Y) & 0 \\ 0 & \alpha\Lambda_u(Y) \end{bmatrix}$$

e é um operador linear positivo. Note que, dadas as condições de positividade sobre os pares $\sigma_{x,u}$, $\bar{\sigma}_{x,u}$ em (4.6), os operadores $\Lambda_x(Y)$ e $\Lambda_u(Y)$ são formas semidefinidas positivas, satisfazendo-se assim a positividade do operador $\Pi(\cdot)$.

A seguir, considere equações modificadas de Lyapunov da forma

$$Y = \alpha A^\top Y A + \alpha\Lambda_x(Y) + Q \quad (4.55)$$

No caso das equações de Lyapunov linearmente perturbadas (4.55) que se obtêm na abordagem CVIU, estas apresentam solução sempre que existir $Y \succ 0$ tal que $(I - \mathcal{L}_{\bar{A}} - \alpha\Lambda_x)(Y) \succ 0$ para $\bar{A} = \alpha^{1/2}A$, quer dizer caso exista uma solução única $Y \succ 0$ para

$$Y - \bar{A}^\top Y \bar{A} - \alpha\Lambda_x(Y) \succ 0, \quad \bar{A} := \alpha^{1/2}A \quad (4.56)$$

isto é, se $\mathcal{L}_{\bar{A}} + \alpha\Lambda_x(Y)$ for estável ou, alternativamente, se observarem quaisquer das condições enunciadas pelo Teorema 2.2.

No que diz respeito às equações racionais de Riccati, note que as condições para solução decorrem das Definições de estabilizabilidade 2.13 e detetabilidade 2.14 do Capítulo 2. Isto é, se existe uma matriz F tal que

$$Y - (\bar{A} + BF)^\top Y (\bar{A} + BF) - \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^\top \Pi(Y) \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} > 0 \quad (4.57)$$

é satisfeita para algum par (F, Y) com $Y \succ 0$, então (\bar{A}, B) é estabilizável relativo a Π . De igual natureza, tem-se que o par (Q, \bar{A}) será detetável relativo a $\alpha\Lambda_x(Y)$ se houver uma matriz L e uma solução $Y \succ 0$ tal que

$$Y - (\bar{A} + LQ)^\top Y (\bar{A} + LQ) - \alpha\Lambda_x(Y) \succ 0, \quad \bar{A} = \alpha^{1/2}A \quad (4.58)$$

ou seja, se $(\bar{A} + LQ)$ é estável relativo a $\alpha\Lambda_x(Y)$.

Adicionalmente, se $Q - NR^{-1}N^\top \succeq 0$ e $(Q - NR^{-1}N^\top, \bar{A} - BR^{-1}N^\top)$ é detetável relativo a

$$\begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N^\top \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N^\top \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

então toda solução semidefinida positiva de $\mathcal{R}(Y) = Y$ é estabilizante. Este resultado permite que se obtenham as seguintes condições de convergência das soluções de Riccati $\mathcal{R}(Y) = Y$ segundo o algoritmo proposto.

De resto, no contexto CVIU e de acordo com as condições do Teorema 2.4, caso se observem as condições a seguir, então o método iterativo explicitado na Seção 2.6.1 do Capítulo 2 calcula a solução da equação racional de Riccati correspondente com garantia de convergência

- (i) $R \succ 0$, $\begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \succeq 0$,
- (ii) $(\alpha^{1/2}A, B)$ é d-estabilizável relativo a Π ,
- (iii) $(Q - NR^{-1}N^\top, \alpha^{1/2}A - BR^{-1}N^\top)$ é d-detetável relativo a

$$\begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N \end{bmatrix}^\top \Pi \begin{bmatrix} I \\ -R^{-1}N \end{bmatrix}$$

isto é, o método iterativo descrito pelo algoritmo na Seção 2.6.1, Capítulo 2 converge, iterativamente, para a solução $Y \succeq 0$ de (4.54) a partir de qualquer valor inicial $Y_0 \succeq 0$.

4.3.1 Um segundo método iterativo

Um segundo método que pode ser empregado tanto na solução das equações de Riccati racionais (4.47) quanto das equações de Lyapunov (4.33), pode ser visto como um procedimento de relaxação numérica. O método em questão, se inspira naquele abordado em (VAL *et al.*, 1998) e motivado pelas equações de Riccati acopladas que emergem do controle linear quadrático para sistemas lineares com saltos Markovianos.

Dito isso, no que concerne as equações de Riccati racionais que vem à tona na abordagem CVIU, a solução relaxada alcançada por vias da aplicação deste segundo método é obtida da forma que se passa a descrever. Inicia-se tomando $Y^{(0)} = 0$ para então resolver (4.47) e, desse primeiro passo, obtém-se $Y^{(1)}$. A partir daí, tome $\tilde{Q} = \tilde{Q}(Y^{(1)})$, $\Omega = \Omega(Y^{(1)})$ e resolva (4.47) novamente para determinar $Y^{(2)}$, completando a segunda iteração do método. Prossegue-se sucessivamente com o método de sorte que cada par $(\tilde{Q}(Y^{(k)}), \Omega(Y^{(k)}))$ é utilizado na determinação da nova solução $Y^{(k+1)}$. Ou seja, este passo pode ser visto como uma atualização da solução anterior $Y^{(k)}$.

Nesta conformidade, se a equação tipo Riccati (4.47) admitir uma única solução $Y \succeq 0$, este procedimento dará origem a uma sequência monótona e convergente tal que $Y^{(k)} \nearrow Y$, para k suficientemente grande. Por outra forma, diz-se que $Y^{(k)}$ converge para Y no sentido de positividade de matrizes, isto é, $Y^{(k)} - Y^{(k-1)} \succeq 0$. Por sua vez, a equação de Lyapunov linearmente perturbada (4.33) emprega uma forma bastante similar, porém mais simples, do método de relaxação detalhado aqui.

Comentário 4.10. *Note que ao empregar este segundo método iterativo, supõe-se a priori, que as equações generalizadas de Lyapunov e Riccati que emergem no contexto CVIU têm solução única $Y \succeq 0$. De fato, quando este for o caso, este método fornece uma maneira deveras simples para obtenção destas soluções. Entretanto, caso as condições de d-detetabilidade para (Q, \bar{A}) relativo a $\alpha\Lambda_x(Y)$ e estabilidade para (\bar{A}, B) relativo a $\Pi(Y)$ não forem satisfeitas (Cf. Seção 4.3), estas equações não têm solução e a convergência deste método, obviamente, não é observada.*

4.4 Estabilidade estocástica das soluções

Nesta Seção, atenta-se para o estudo da estabilidade de sistemas em malha fechada obtidos quando do emprego da lei de controle CVIU em horizonte infinito com custo quadrático descontado.

Recorde-se a solução assintótica $V_a^{\bar{s}}$ válida para cada região assintótica $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ quando $\ell \rightarrow \infty$ e a solução da equação racional de Riccati correspondente (4.47). É verdade que ao fazer $Q - NR^{-1}N^\top \succ 0$ e a equação racional de Riccati admitir solução, esta será definida positiva (Cf. Lema 2.4) e o controle por realimentação de estados associado tem propriedade estabilizante no sentido determinístico. Ademais, à luz do Teorema 4.1, V^* é estritamente convexa e, para cada $\bar{s} \in \mathbf{S}$, dada qualquer sequência $\epsilon_k > \epsilon_{k+1} \downarrow 0$, existe uma sequência monotonicamente crescente $\ell_k < \ell_{k+1} < \dots$ tal que

$$\sup_{x \in \mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell_k)} |V^*(x) - V_a^{\bar{s}}(x)| < \epsilon_k$$

Lema 4.5. *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade,*

$$\alpha E[V^*(x_{+1}^*)] - V^*(x) \leq -x^\top(Q - NR^{-1}N^\top)x \quad (4.60)$$

em que x_{+1}^* indica o estado em uma transição de estágio, sob a ação do controle ótimo associado $u^*(x)$ em x . Outrossim, se $Q - NR^{-1}N^\top \succ 0$, então a função valor é coerciva, i.e., $V^*(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

Demonstração. Note que se $R \succ 0$, então $[x \ u]^\top O[x \ u] \geq x^\top(Q - NR^{-1}N^\top)x$, para todo x, u , e portanto

$$\sum_{k=0}^N \alpha^k z_k^\top O z_k \geq \sum_{k=0}^N \alpha^k x_k^\top (Q - NR^{-1}N^\top) x_k > 0$$

para qualquer trajetória $k \rightarrow x_k(\omega)$ senão $x_k \equiv 0, \forall k$. Como esta última tem probabilidade nula pela ação do ruído persistente que afeta o sistema, V^* é estritamente convexa e a avaliação acima em conjunto com (4.28), mostram que a função valor é coerciva. Alternativamente, pode-se mostrar a coercividade da função valor por aplicação direta do Lema 2.4. Isto é, caso a equação racional de Riccati (4.47) tenha solução, sob a condição $(Q - NR^{-1}N^\top) \succ 0$, a solução obtida será $Y \succ 0$ e, portanto, segue imediatamente que a forma quadrática do custo ótimo nas regiões assintóticas $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$ quando $\ell \rightarrow \infty$, dada por (4.48) para todo $\bar{s} \in \mathbf{S}$, também é positiva definida. De sorte que, dada a convexidade da função valor, e a continuidade que decorre desse resultado, segue que a função valor do problema de controle CVIU é coerciva.

Finalmente, mostrou-se a coercitividade da função valor e, portanto, vale a desigualdade na expressão da PD enunciada no lema, completando-se assim esta prova. \square

Comentário 4.11. Evidencia-se que sempre que $Q - NR^{-1}N^\top \succ 0$, seque que as curvas de nível inferiores da forma $\{x : V(x) \leq c\}$ são compactas para cada $c > 0$ e a função valor V^* é um funcional tipo Lyapunov. Além disso, aparte da presença do fator de desconto α , a desigualdade (4.60) em muito se assemelha com o critério de estabilidade Foster-Lyapunov para processos Markovianos, neste ponto o leitor interessado é referido a (MEYN; TWEEDIE, 1992; COSTA; DUFOUR, 2005) para consulta. O passo final para a análise de estabilidade do método consiste então em mostrar que o critério de Foster-Lyapunov vale para uma versão modificada do processo CVIU original.

Teorema 4.2. Suponha que $Q - NR^{-1}N^\top \succ 0$. Considerando-se a solução ótima do problema de controle posto em (4.27), então é verdade que $\alpha^{k/2}x_k^* \rightarrow 0$ P-q.c quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração do Teorema 4.2. Inicialmente, sejam as seguintes mudanças de variáveis $x_k^\alpha := \alpha^{k/2}x_k$ bem como $u_k^\alpha := \alpha^{k/2}u_k$. Então, a dinâmica do sistema CVIU nestas novas variáveis é dada por

$$x_{k+1}^\alpha = A^\alpha x_k^\alpha + B^\alpha u_k^\alpha + \check{\sigma}(x_k^\alpha, u_k^\alpha)W_k, \quad x_0 = x \quad (4.61)$$

com as matrizes $A^\alpha := \alpha^{1/2}A$, $B^\alpha := \alpha^{1/2}B$ e

$$\begin{aligned} \check{\sigma}(x_k^\alpha, u_k^\alpha) &:= \alpha^{(k+1)/2} \hat{\sigma}(x_k, u_k) \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^{(k+1)/2}\sigma & \alpha^{(k+1)/2}\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x_k^\alpha|) & \alpha^{(k+1)/2}\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u_k^\alpha|) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Neste ponto, pode-se escrever para cada $N > 0$ que

$$\sum_{k=0}^N \alpha^k \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} = \sum_{t=0}^N \begin{bmatrix} x_t^\alpha \\ u_t^\alpha \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} Q & N \\ N^\top & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^\alpha \\ u_t^\alpha \end{bmatrix}$$

e está claro desta identidade que a mudança de variáveis proposta dá origem a um problema de controle na forma padrão sem desconto e para o qual o custo associado ao par $k \rightarrow (x_k^\alpha, u_k^\alpha)$ replica aquele de $k \rightarrow (\alpha^{k/2}x_k, \alpha^{k/2}u_k)$ quando os intervalos coincidem.

Ademais, da equação da PD, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} V^*(x^\alpha) &= \inf_{u \in \mathcal{U}(x)} \left\{ E \left[[x^\alpha \ u^\alpha]^\top O [x^\alpha \ u^\alpha] + \alpha V^*(x_{+1}^\alpha) \right] \right\} \\ &= E \left[[x^\alpha \ u^{*\alpha}]^\top O [x^\alpha \ u^{*\alpha}] + V^*(x_{+1}^{*\alpha}) \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

de modo que x_{+1}^α indica o estado em uma transição de estágio e, de modo similar para $x_{+1}^{*\alpha}$ quando sob a ação do controle ótimo associado $u^{*\alpha}(x^\alpha)$ em x^α . Dessa forma, assim como no Lema 4.5, tem-se que

$$E \left[V^*(x_{+1}^{*\alpha}) \right] - V^*(x^\alpha) \leq -x^{\alpha\top} (Q - NR^{-1}N^\top) x^\alpha \quad (4.64)$$

e a expressão acima estabelece a estabilidade estocástica no sentido de Foster-Lyapunov. Em particular, pode-se expressar

$$E[V^*(x_{+1}^\alpha) | \mathcal{F}_k] \leq V^*(x_k^\alpha) \quad \text{para quase todo } k \in \mathbb{N}, \quad P - \text{q.c.} \quad (4.65)$$

A desigualdade (4.65) indica que $\{V^*(x_k^\alpha), \mathcal{F}_k\}$, $k \geq 0$ é um supermartingale positivo, i.e., $k \rightarrow V^*(x_k^{*\alpha})$ decresce em valor esperado condicional. Logo, existe uma variável aleatória $m_\infty = 0$, quase certamente, tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} V^*(x_k^{*\alpha}) \rightarrow m_\infty \quad (4.66)$$

Logo, da coercividade de V^* e, tendo em mente a desigualdade (4.65), segue imediatamente que $x_k^{*\alpha} = \alpha^{k/2} x_k^* \rightarrow 0$ P -q.c. e a prova está completa. \square

Comentário 4.12. Observe como a conclusão sobre a estabilidade estocástica do sistema CVIU controlado é, em sua maior parte, devida ao forte resultado expresso por meio da desigualdade em (4.65). Ao mostrar que $(V_k^*(x_k), \mathcal{F}_k)$ possibilita a construção de um supermartingale positivo, pode-se concluir que a sequência de funções teste positivas e mensuráveis (4.65) convergem a medida em que se toma um tempo de parada N suficientemente grande.

Outrossim, note a interessante característica apresentada pelo problema de controle ótimo nas novas variáveis $x_k^\alpha := \alpha^{k/2} x_k$ e $u_k^\alpha := \alpha^{k/2} u_k$ no qual a porção estocástica do processo $\check{\sigma}(x_k^\alpha, u_k^\alpha) W_k$ expressa por (4.62) está limitada por uma envoltória geométrica. Desta característica, decorre que a perturbação estocástica esvanece a longo prazo, o que indica que a trajetória do sistema de fato caminha para a origem, em valor esperado, a longo prazo, quase certamente.

5 Experimentos numéricos

5.1 Composição da solução

Recapitulando sucintamente as conquistas do Capítulo 4, o Lema 4.3 estabelece uma conexão entre a solução da equação discreta tipo Lyapunov (4.33) e a solução do problema de controle dentro da região \mathcal{R}^0 . O proferido lema também calcula analiticamente os limites da fronteira da inação global. Além disso, um fato não menos importante é a característica de simetria que se obtém para os limites da i -ésima região de inação. Apesar da impossibilidade de expressá-los precisamente por estarem contidos em segmentos das regiões intermediárias, sabe-se que estas fronteiras são formadas por hiperplanos simétricos no espaço de estados.

Em contrapartida, o Lema 4.4 ocupa-se de prover a solução para o problema de controle em regiões que consistem dos pontos cuja distância de cada região \mathcal{R}_i^0 é suficientemente grande e, portanto, estão distantes da origem. Por essa razão, o controle ótimo u^* a elas associado não conta com nenhuma entrada nula. Por sua vez, a solução válida nestas regiões está associada a uma equação racional de Riccati (4.47) e que engendra uma lei de controle estacionária ótima em forma afim de realimentação de estados.

Não obstante, percebe-se que as soluções analíticas do problema de controle (4.27) dadas conjuntamente pelos Lemas 4.3 e 4.4 não cobrem todo o espaço de estados. Até este ponto, as denominadas *regiões intermediárias* que não são compreendidas tanto pela inação global quanto pelas regiões assintóticas, permanecem com controle por determinar.

5.1.1 Solução numérica subótima

A fim de apresentar uma solução completa para o problema de controle ótimo posto em (4.27), propõe-se uma solução numérica aproximada a ser adotada nas regiões intermediárias. Observe que a motivação para a adoção desta solução subótima decorre da necessária, porém intrincada tarefa de se resolver o problema de controle levando em consideração as condições de contorno na inação global e nas regiões assintóticas concomitantemente.

Comentário 5.1. *Aprecie a dificuldade que o problema de se resolver a função Hamiltoniana (4.51) para todo x ponto interior das regiões intermediárias suscita. Nada se sabe sobre a forma que a função valor toma nestas regiões. Valhe-se apenas do conhecimento de que esta, qualquer que seja ela, conecta a solução de Lyapunov à solução de Riccati de forma a preservar a convexidade do custo ótimo. De modo que é deveras mais sensato evadir-se deste problema e propor uma solução aproximada válida nestas regiões*

intermediárias, levando em consideração os controles ótimos na inação e assintóticos, determinados analiticamente.

À vista do Comentário 5.1, seja a aproximação para o controle obtida pela combinação convexa entre os hiperplanos que definem os controles ótimos, determinados em forma fechada, na inação e nas regiões assintóticas. Note que, embora simplista, essa alternativa propicia a evasão do problema de resolver o Hamiltoniano (4.51) nas regiões intermediárias. Ao mesmo tempo, viabiliza a obtenção de controles subótimos a serem considerados nestas regiões. Dessa forma, completa-se a solução do problema de controle ótimo proposto em (4.27) que apresentará solução de controle linear por partes no espaço de estados.

5.2 Abordagem CVIU aplicada ao problema de pesca

Servindo-se da solução aproximada discutida na Subseção 5.1.1 e que permite a composição da solução completa para o problema de controle posto em (4.27), nesta seção, aplica-se a abordagem CVIU em um problema de controle em ecologia. Em particular, considera-se o problema de explorar um estoque de peixes a longo prazo com interesses econômicos. O modelo considerado nesta seção é retirado de (LADINO *et al.*, 2016) e estuda a dinâmica de uma população de peixes com fatores de recrutamento e captura.

Em outras palavras, o modelo em questão descreve a dinâmica de uma população de peixes estruturada em dois estágios (isto é, duas subpopulações), o estágio pré-recruta (ovas, larvas e juvenis) e o estágio explorável (recrutas ou adultos). Além disso, o relacionamento entre esses estágios se dá por recrutamento¹.

Antes de introduzir o modelo em si, oferecem-se as seguintes descrições necessárias para o bom entendimento do problema. Caso haja o interesse, o leitor é referido ao artigo (LADINO *et al.*, 2016) para maiores detalhes.

1. A população total no tempo $t \in \mathbb{N}$ é dividida em duas subpopulações: população pré-recruta $x(t) \geq 0$ e população explorável $y(t) \geq 0$.
2. A taxa de reprodução da população explorável é $\delta > 0$. Considera-se que a população pré-recruta não é madura o suficiente para procriar.
3. A taxa de mortalidade por causas naturais é, por simplicidade, tomada igual entre as subpopulações e é representada por $\mu \in (0, 1)$.
4. O número máximo de recrutas produzidos é representado pelo parâmetro $\alpha > 0$.

¹ Recrutamento em biologia refere-se a sobrevivência do indivíduo durante todo o estágio pré-recruta até que se atinja, por crescimento, a fase adulta.

5. O parâmetro β é o estoque necessário para se produzir (em média) um recrutamento igual a $\alpha/2$.
6. O número total de recrutas depende somente do tamanho da população de pré-recrutas. Assim, a relação estoque-recrutamento segue: $R = \frac{\alpha x(t)}{\beta + x(t)} \leq x(t)$.
7. A eficiência da técnica de pesca utilizada é medida pelo coeficiente de capturabilidade $q > 0$.
8. O esforço de captura medido, por exemplo, em termos de barcos/dia é expresso por $E > 0$.
9. A taxa de mortalidade por captura é proporcional ao esforço de captura e dada por: $F = qE$.
10. A taxa de mortalidade total da população explorável é, portanto, dada por: $\mu + F$.

Dada essa breve introdução, o modelo dinâmico que descreve o comportamento desse estoque de peixes é dado pelo sistema de equações a diferença não lineares:

$$T : \begin{cases} x(t+1) = x(t) + \delta y(t) - \frac{\alpha x(t)}{\beta + x(t)} - \mu x(t) \\ y(t+1) = y(t) + \frac{\alpha x(t)}{\beta + x(t)} - (\mu + F)y(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Comentário 5.2. Para que o modelo (5.1) tenha significado biológico, não se pode admitir quaisquer combinações de parâmetros. As seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$1 - \mu - \frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \quad (5.2a)$$

$$1 - \mu - F \geq 0 \quad (5.2b)$$

No instante inicial, a população de pré-recrutas satisfaz $x(t) \geq 0$. Quando o sistema evolui do instante t para $t+1$, a fração $\mu x(t)$ morre de causas naturais enquanto a fração $\frac{\alpha x(t)}{\beta + x(t)}$ se torna adulta. Obviamente, a soma dessas frações não pode exceder o estoque inicial de pré-recrutas $x(t)$. Ou seja, para todo $t \geq 0$ deve-se ter:

$$x(t) - \frac{\alpha x(t)}{\beta + x(t)} - \mu x(t) \geq 0, \quad \forall x(t) \geq 0 \quad (5.3)$$

A condição (5.2a) resulta de (5.3) ao dividi-la por $x(t)$ e analisar a expressão resultante em $x(t) = 0$.

Da mesma maneira, seja o número de indivíduos na população adulta $y(t) \geq 0$ no tempo inicial t . Na transição para o instante $t+1$, a fração $\mu y(t)$ morre de causas naturais, enquanto a parcela $Fy(t)$ é capturada. A soma dessas parcelas não pode exceder o número de indivíduos iniciais $y(t)$, daí

$$y(t) - (\mu + F)y(t) \geq 0 \quad (5.4)$$

Analogamente, a condição (5.2b) resulta de (5.4) e vale para todo $t \geq 0$.

No que se refere a existência de pontos de equilíbrio, o sistema (5.1) admite um ponto de equilíbrio trivial em $P_1^* = (0, 0)$ (estado de extinção) para todos valores positivos dos parâmetros. Por outro lado, se e somente se $R_0 > 1$, haverá um segundo ponto de equilíbrio não trivial $P_2^* = (x_2^*, y_2^*)$ (estado de coexistência), localmente assintoticamente estável com $x_2^* > 0$, $y_2^* > 0$, ou seja:

$$(x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{\alpha}{\mu}(R_0 - 1), \frac{\alpha}{\delta - (\mu + F)}(R_0 - 1) \right), \quad R_0 = \frac{\delta}{\mu + F} - \frac{\mu\beta}{\alpha} \quad (5.5)$$

Dada essa introdução do problema, assuma que as subpopulações pré-recruta e adulta em um cenário real seguem aproximadamente o modelo dinâmico (5.1) na vizinhança do ponto de equilíbrio de coexistência (x_2^*, y_2^*) . Nesse contexto, o modelo (5.1) é passível de incerteza no sentido em que este é uma representação grosseira do sistema real, fruto de uma abstração matemática sobre o modelo ecológico em uma aplicação do mundo real cuja dinâmica é desconhecida e impossível de ser determinada precisamente. Ao mesmo tempo, devido a complexidade do ecossistema, o modelo (5.1) conta com incertezas paramétricas mesmo no ponto de equilíbrio (x_2^*, y_2^*) .

Note que esse cenário se enquadra perfeitamente na classe geral de problemas que motivaram o estudo da síntese de controladores consistentes com o princípio CVIU. De sorte que a tratativa deste problema via aplicação da abordagem CVIU vem bem a calhar. Então, passa-se a construir o controlador CVIU correspondente com fins de determinar uma política ótima de exploração dos peixes que garanta a sobrevivência da espécie a longo prazo. Inicia-se então por considerar a linearização do sistema (5.1) em torno do ponto de equilíbrio P_2^* . Logo, considere

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x(t)} x(t+1) & \frac{\partial}{\partial y(t)} x(t+1) \\ \frac{\partial}{\partial x(t)} y(t+1) & \frac{\partial}{\partial y(t)} y(t+1) \end{bmatrix} \bigg|_{(x_2^*, y_2^*)} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial E} x(t+1) \\ \frac{\partial}{\partial E} y(t+1) \end{bmatrix} \bigg|_{(x_2^*, y_2^*)} \quad (5.6)$$

e que resulta em:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \mu - \frac{\alpha\beta}{(\beta+x_2^*)^2} & \delta \\ \frac{\alpha\beta}{(\beta+x_2^*)^2} & 1 - \mu - F \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -qy_2^* \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para a execução desse experimentos, são considerados os seguintes valores para os parâmetros $\alpha = 64$, $\beta = 170$, $\mu = 0.37$, $q = 0.08$ e $\delta = 0.98$. Observe que essas escolhas de parâmetros satisfazem as condições (5.2a), (5.2b), bem como a condição para existência do ponto de equilíbrio não trivial P_2^* , localmente assintoticamente estável $R_0 > 1$.

Para estabelecer o problema de controle ótimo, tomam-se os parâmetros de custo (5.8) bem como o fator de desconto de 0.9.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2745 & 0.0600 \\ 0.0600 & 0.2263 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1.6165 \\ 1.2285 \end{bmatrix}, \quad R = 100, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 4.50 & 0.75 \\ 0.75 & 2.10 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Além disso, os parâmetros de ajuste para síntese do controlador CVIU são

$$\bar{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0.2300 & 0.0710 \\ 0.0940 & 0.2571 \end{bmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0.2884 & 0.1280 \\ 0.1192 & 0.3363 \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}_u = \begin{bmatrix} 0.9379 \\ 0.9554 \end{bmatrix}, \quad \sigma_u = \begin{bmatrix} 1.3213 \\ 1.2812 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Com a finalidade de buscar uma política ótima para exploração de um estoque de peixes cuja dinâmica presupõe-se seguir o modelo (5.1) na vizinhança do ponto de equilíbrio (5.5), propõe-se neste experimento o controle CVIU em horizonte infinito. Com os parâmetros do problema escolhidos neste problema, o ponto de equilíbrio de coexistência é $P_2^* = (33.7237, 23.5430)$.

A política CVIU obtida da aproximação discutida em 5.1.1 é apresentada na figura 1 para uma região do espaço de estados ao redor da origem. Conforme discutido de antemão, por vias da combinação convexa dos controles, o mapa 1 notadamente apresenta forma afim definida por partes no espaço de estados. Observe também como a figura 1 interessantemente oferece uma oportunidade particular para visualização do formato da região de inação (região de não variação). Esta, dada a forma quadrática do custo por estágio, é formada por planos paralelos e simétricos em relação a origem (c.f. (4.35)).

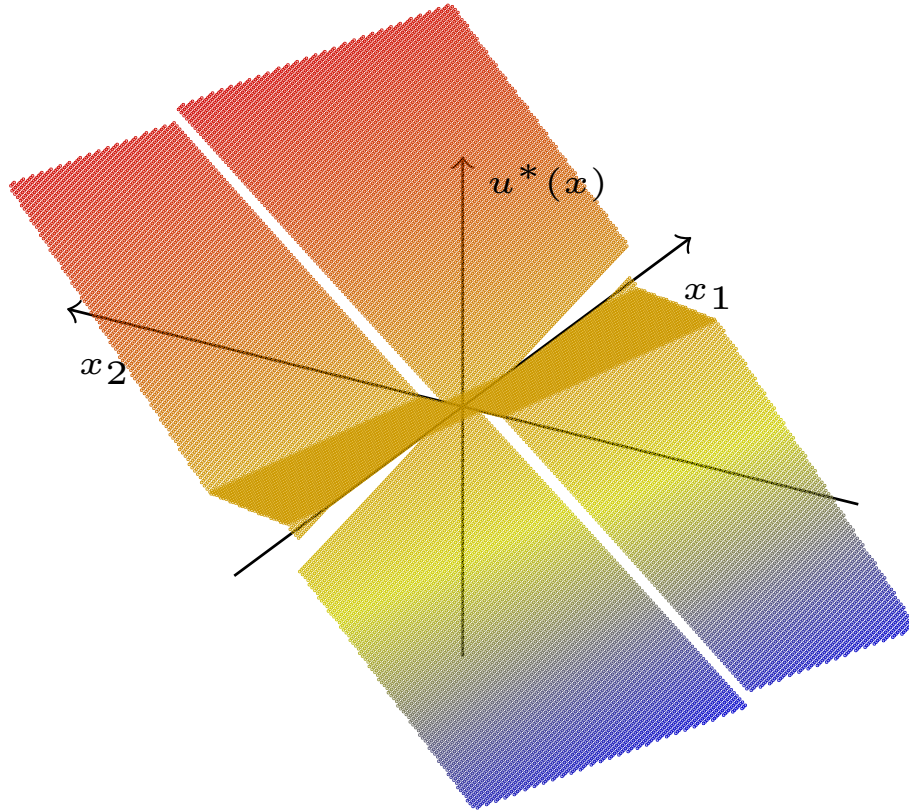
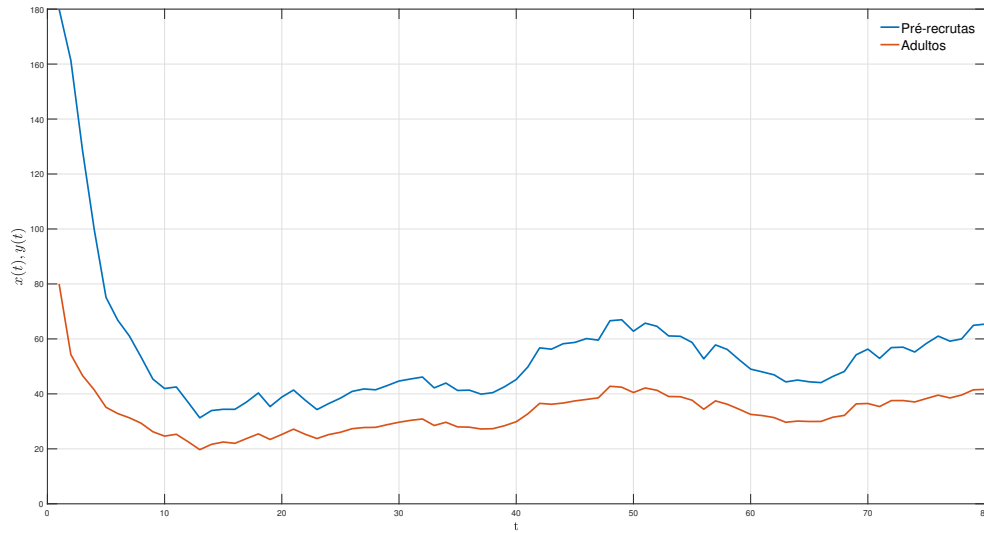


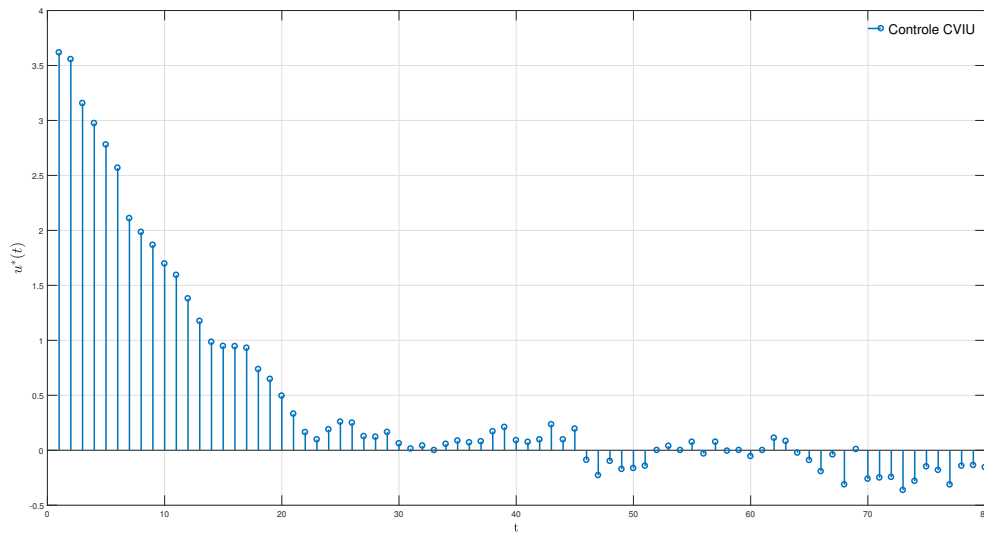
Figura 1 – Configuração do controle ótimo CVIU para o problema (5.1), parâmetros de custo (5.8) e parâmetros de ajustes (5.9).

Obtido o controle CVIU ótimo acima e partindo do estado inicial $(x_0, y_0) = (180, 80)$ determina-se, pela evolução do sistema, uma política que é realimentada no modelo não linear por vias do esforço de pesca (E). Assim, quando a política CVIU assume

valores $u^* = 0$, toma-se o esforço de pesca nominal no equilíbrio ($E = 1$). Consequentemente, valores não nulos do controle CVIU, acarretam em uma variação em torno do esforço de pesca nominal. Ademais, para observação do comportamento dinâmico do sistema não linear sob controle CVIU, somam-se às equações (5.1), ruídos persistentes a fim de forçar uma regulação constante pelo controle CVIU. O ruído em questão é branco, com parâmetro de intensidade dado pela matriz σ em (5.8). As saídas do sistema não linear (5.1) controlado, bem como a política ótima CVIU são descritas pelas figuras 2a e 2b respectivamente.



(a) Trajetória dos estados sob controle CVIU



(b) Política de controle ótima CVIU

Figura 2 – Controle CVIU e trajetórias para o sistema não linear (5.1)

Da figura 2a, as trajetórias do sistema não linear (5.1) sob ação do controle CVIU convergem em valor esperado para o ponto de equilíbrio de coexistência. Afinal, o sistema é inicializado no estado inicial (x_0, y_0) contido na bacia atratora criada pelo ponto P_2^* . De fato, a política ótima CVIU descrita em 2b de fato conduz, em média, as trajetórias do sistema controlado ao equilíbrio. Dessa forma, o esforço de pesca do sistema controlado deve ser entendido como o esforço nominal ($E = 1$) somado à variação de controle CVIU, de modo que quando $u^* = 0$, emprega-se o esforço nominal de pesca no equilíbrio.

5.3 Controle CVIU *versus* LQG

O intuito desta segunda parte dos experimentos numéricos é de tratar o problema de controle ótimo, dessa feita considerando um sistema estocástico artificialmente criado com dinâmica subdeterminada. Além disso, propõe-se uma comparação entre os custos incorridos, em valor esperado, pelas aplicações das políticas CVIU e LQG para um sistema que apresenta descasamento de parâmetros. Com esse propósito, considere o seguinte sistema estocástico nominal

$$x_{k+1} = A^0 x_k + b^0 u_k + \sigma w_k \quad (5.10)$$

com

$$A^0 = \begin{bmatrix} 0.5950 & -0.1080 \\ -0.3655 & 0.4000 \end{bmatrix} \quad b^0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.15 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{0.4} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.4} \end{bmatrix}$$

Admita, porém, que apenas a estatística do ruído em (5.10) seja perfeitamente conhecida, isto é, w_k é uma sequência i.i.d. de ruído branco com média nula e variância unitária. No que diz respeito às matrizes da dinâmica, contam-se apenas com estimativas grosseiras expressas pelo par (\bar{A}, \bar{b}) . Estas, representam as matrizes incertas das quais se dispõem no contexto de sistemas com dinâmicas pouco conhecidas, visto que o par nominal (A^0, b^0) é inacessível e impossível de ser precisamente determinado. Dessa forma, para $\bar{A} = A^0 + \Delta A$ e $\bar{b} = b^0 + \Delta b$, uma possível representação CVIU é dada por

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{b}u_k + \sigma w_k + \left(\sigma_x + \bar{\sigma}_x \text{diag}(|x_k|)\right)\varepsilon_k^x + \left(\sigma_u + \bar{\sigma}_u \text{diag}(|u_k|)\right)\varepsilon_k^u$$

e as escolhas,

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -\delta & 0.167A_{12}^0 \\ 0.2A_{21}^0 & -\delta \end{bmatrix} \quad \Delta b = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.15 \end{bmatrix} \quad \bar{\sigma}_x = 0.2I_{2 \times 2} \quad \sigma_x = 0.15I_{2 \times 2} \quad \bar{\sigma}_u = 1.25 \sigma_u$$

Nesse sentido, para simular o desconhecimento sobre a real dinâmica (5.10), ambas as abordagens CVIU e LQG consideram o par incerto (\bar{A}, \bar{b}) para síntese de controle. Em seguida, as políticas obtidas são aplicadas ao sistema (5.10) a partir do qual um conjunto de simulações de Monte Carlo computa o custo médio incorridos por ambas políticas para efeito de comparação. Ademais, a fim de reproduzir cenários com diferentes

níveis de incerteza sobre o sistema, essas comparações são feitas para múltiplos valores de δ conforme descrito na tabela (5.3) e determinado range de valores para o parâmetro de ajuste $\bar{\sigma}_u$ da abordagem CVIU. O fator de desconto bem como as matrizes de custo Q , N e R a serem utilizados pelas abordagens CVIU e LQG são escolhidos

$$\alpha = 0.9 \quad Q = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R = 2$$

Nesta configuração, considerando a aproximação numérica proposta anteriormente, a figura 3 mostra a superfície de controle que mapeia univocamente cada estado a um controle CVIU. Esta figura também apresenta uma valorosa oportunidade para visualização da forma da região de inação (que é única, portanto global) para o sistema. Observe que como este é um sistema monoentrada, os limites da referida região podem ser analiticamente calculados para toda a sua extensão, conforme discutido na Subseção 4.2.1. Note da Figura 3 que a região \mathcal{R}^0 está limitada por planos paralelos e está disposta simetricamente em relação a origem.

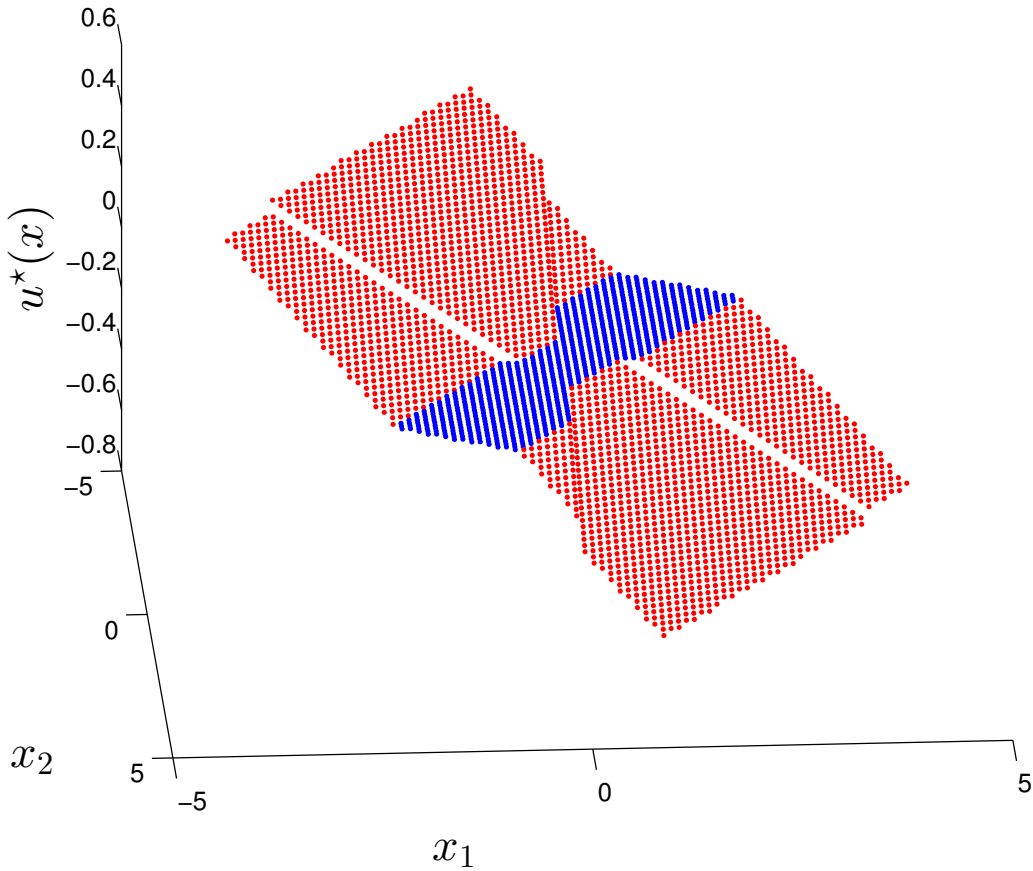


Figura 3 – Mapa do controle CVIU ótimo e região \mathcal{R}^0 destacada em azul

Para o cômputo dos resultados apresentados a seguir, um conjunto de 100 simulações de Monte Carlo é executado a fim de estabelecer uma comparação entre os

custos incorridos, em valor esperado, pelas aplicações das políticas CVIU e LQG. Ambas técnicas consideram as matrizes incertas (\bar{A}, \bar{b}) definidas em cinco cenários distintos definidos por cada nível de descasamento medido por δ , conforme detalhado na Tabela 1. No melhor caso, a técnica CVIU obtém um ganho relativo de 21.52% frente ao custo incorrido pela adoção da política LQG no cenário incerto considerado.

Tabela 1 – Ganho de desempenho relativo para distintos casos de descasamento de parâmetros

δ	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60
$G_{max}(\%)$	0.92%	2.97%	6.59%	12.54%	21.62%

Em caráter complementar, a Figura 4 é a superfície que descreve o ganho relativo de desempenho CIVU *vs* LQG quando se considera uma varredura no parâmetro de ajuste $\bar{\sigma}_u$ considerando $\delta = 0.37$.

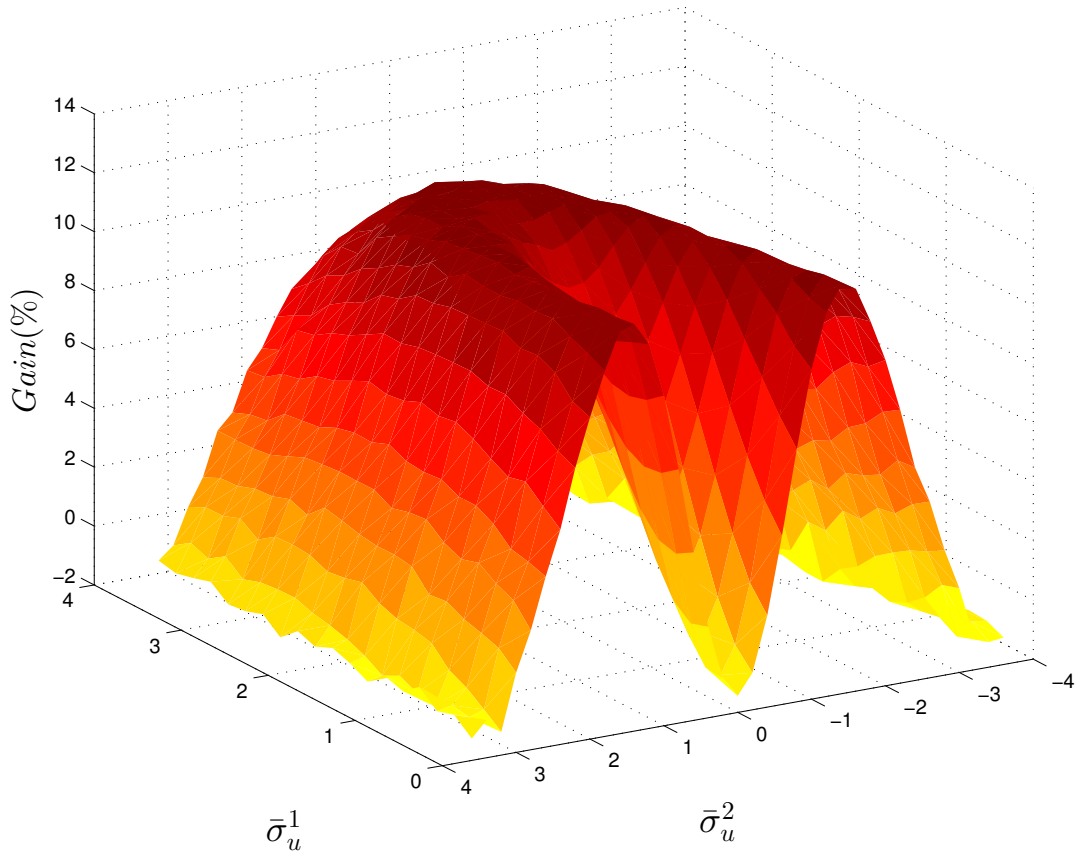


Figura 4 – Ganho de performance relativo CVIU vs LQG para $\delta = 0.37$

5.4 Um sistema CVIU bidimensional no controle

Nesta seção, objetiva-se explorar o problema de controle CVIU para sistemas bidimensionais no controle. Este interesse emana principalmente da curiosidade em analisar os efeitos da dependência entre os sinais das entradas do vetor de controle ótimo na determinação das fronteiras da i -ésima região de inação \mathcal{R}_i^0 . Para maior conveniência, reescreve-se aqui a equação que determina essas fronteiras, dada por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{R}^0\} : \left\langle \Omega(Y)_i^{-1}, (\alpha B^\top Y A + N^\top) x + \frac{\alpha}{2} (B^\top \gamma + \Delta_u(Y) \mathcal{S}(u)) \right\rangle = 0 \right\} \quad (5.11)$$

Como versado anteriormente na Subseção 4.2.1, o caso CVIU multidimensional no controle manifesta uma dificuldade no que tange a determinação das fronteiras de cada região \mathcal{R}_i^0 . Esta dificuldade resulta do fato de que cada região \mathcal{R}_i^0 estende-se indefinidamente, a partir da inação global \mathcal{R}^0 , em direção a segmentos das denominadas regiões intermediárias do espaço de estados. Nestas regiões, a despeito de se conhecer a expressão que determina as fronteiras de cada inação, expressa analiticamente por (5.11), não se tem acesso aos parâmetros Y, γ, c que parametrizam o custo ótimo.

Neste contexto, apela-se para uma saída numérica com o intuito de definir uma aproximação para a solução do problema nas regiões intermediárias. Note que, ao contrário do problema CVIU monoentrada no qual uma combinação convexa simples no controle define uma aproximação razoável para a política e o valor do problema, no caso multi-entradas, a aproximação a ser considerada nas regiões intermediárias é substancialmente mais complexa, pois também abarca as regiões \mathcal{R}_i^0 .

À vista disso, serve-se o método das aproximações estocásticas baseado em diferenças temporais proposto em (NEREU, 2018). Suscintamente, a ideia central por trás dessas técnicas de aprendizado consiste em atualizar incrementalmente as estimativas da função valor, seguindo as informações obtidas em cada transição do sistema CVIU, por vias de simulações de Monte Carlo. Em síntese, a referida técnica de aprendizado se respalda na convexidade, e consequente continuidade, da função valor bem como nas soluções analíticas ótimas conhecidas para as regiões \mathcal{R}^0 e $\mathcal{T}^{\bar{s}}(\ell)$, $\forall \bar{s} \in \mathbf{S}$ quando $\ell \rightarrow \infty$ para, iterativamente, aproximar o controle e o custo ótimos nas regiões intermediárias. O leitor interessado é referido ao trabalho (NEREU, 2018) para maiores detalhes sobre o método.

Seja o sistema CVIU bidimensional no controle, artificialmente criado com matrizes do sistema e matrizes de custo dadas por

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.9461 & 0.1632 \\ 0.1175 & 0.9791 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0.0692 & 0.1323 \\ 0.0528 & -0.2028 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 0.1484 & 0.0195 \\ 0.0195 & 0.1608 \end{bmatrix} & N &= \begin{bmatrix} 0.1146 & 0.0225 \\ 0.0225 & 0.2234 \end{bmatrix} & R &= \begin{bmatrix} 2.2193 & 0.5799 \\ 0.5799 & 1.5669 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

e parâmetros do modelo CVIU dados por

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{bmatrix} 0.1097 & 0.0464 \\ 0.0464 & 0.0933 \end{bmatrix} & \bar{\sigma}_x &= \begin{bmatrix} 0.120 & 0.053 \\ 0.053 & 0.130 \end{bmatrix} \\ \sigma_u &= \begin{bmatrix} 0.253 & 0.0876 \\ 0.0876 & 0.2828 \end{bmatrix} & \bar{\sigma}_u &= \begin{bmatrix} 0.2542 & 0.1083 \\ 0.0874 & 0.2213 \end{bmatrix} & \sigma &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Além disso, considera-se um fator de desconto $\alpha = 0.9$ e o parâmetro de intensidade do ruído da natureza σ agindo sobre o sistema. Com as escolhas das matrizes em (5.12) e (5.13), note que $Q - NR^{-1}N^\top \succ 0$ e, além disto, estas escolhas satisfazem as condições de positividade sobre $\sigma_{x,u}$, $\bar{\sigma}_{x,u}$ para convexidade no Teorema 4.1 bem como as condições suficientes apresentadas no Teorema 2.4. Assim, o problema de controle CVIU ótimo está bem posto e as equações algébricas à ele associadas (eq. Lyapunov e eq. racional de Riccati) apresentam soluções únicas e que são atingidas, garantidamente, pelo emprego dos métodos iterativos apresentados na Seção 4.3.

Isto posto, considerando o sistema CVIU caracterizado pelas matrizes em (5.12) e (5.13), lança-se mão do método de aprendizado proposto em (NEREU, 2018) para aproximar o custo ótimo nas regiões intermediárias. A aplicação do método possibilita a obtenção dos resultados mostrados na Figura 5 que apresenta a superfície de custo ótimo bem como os mapas correspondentes às duas entradas do vetor de controle e que associam a cada estado x um único controle CVIU ótimo $u^*(x)$.

As Figuras 5a e 5b ilustram a primeira e a segunda entradas do vetor controle ótimo, respectivamente. Nestas duas Figuras, a região de inação global \mathcal{R}^0 , formada pela intersecção $\mathcal{R}_1^0 \cap \mathcal{R}_2^0$ bem como os prolongamentos de cada região \mathcal{R}_i^0 que se estendem indefinidamente a partir da inação global são representados pelo *plateau* de não variação do controle observados nas figuras 5a e 5b para $u_i^* \equiv 0$, $i = 1, 2$ respectivamente.

Em cada figura, as regiões adjacentes a \mathcal{R}_i^0 , por outro lado, representam as regiões para as quais o controle na respectiva entrada tem sinal (e possivelmente nula na outra entrada). Por inspeção visual das Figuras 5a e 5b, note a clara indicação de interdependência entre o controle ótimo na i -ésima entrada e os sinais da outra entrada do controle ótimo. Esta relação de interdependência entre os sinais de controle é descrita analiticamente pela expressão do controle ótimo (4.49c) (função de \bar{s}) e verificada visualmente nas figuras pela existência dos “sulcos” no formato da região \mathcal{R}_i^0 oposta e que aparece nas porções do espaço de estados que apresentam controle ótimo não nulo para cada entrada $u_i^*(x)$.

Ressalta-se também a oportunidade singular, através deste exemplo, de observar o comportamento das fronteiras das regiões \mathcal{R}_i^0 nas regiões intermediárias. Assim como ocorre nos controles, as fronteiras destas regiões apresentam um grau de acoplamento (dado pela inversa de $\Omega(\cdot)$) e interdependência entre os sinais das entradas do vetor de controle ótimo $\mathcal{S}(u^*)$ Cf. (4.44).

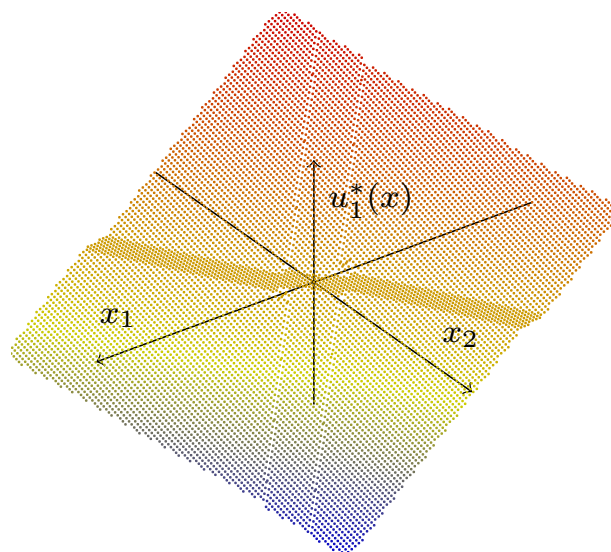
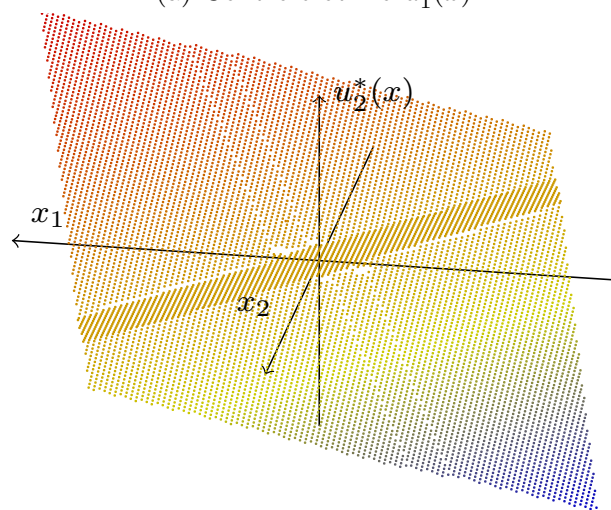
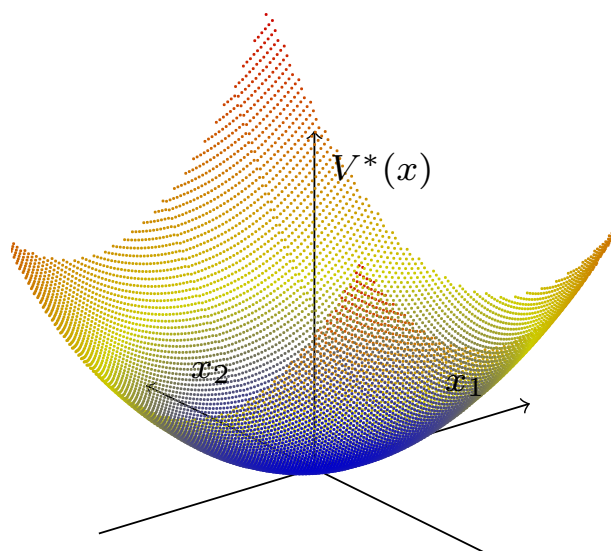
(a) Controle ótimo $u_1^*(x)$ (b) Controle ótimo $u_2^*(x)$ (c) Custo ótimo $V^*(x)$

Figura 5 – Custo e controles CVIU ótimos para o sistema bidimensional

Conclusão e perspectivas futuras

Essa dissertação apresenta um novo modelo que busca capturar as diversas formas de incerteza inerentes a sistemas estocásticos a tempo discreto cujas dinâmicas são pouco conhecidas. No contexto de tomada de decisão, quando um modelo dinâmico completamente conhecido está fora de cogitação, a abordagem CVIU baseia-se na argumentação de que a variação de controle aumenta a incerteza. Este princípio dá origem a uma estratégia de controle que exerce precaução ao intervir no sistema. Dessa maneira, a estratégia CVIU engendra políticas de controle que são tolerantes a grandes níveis de incerteza e, por essa razão, pode ser vista como uma alternativa à análise de pior caso comumente encontrada na teoria de controle robusto.

O presente trabalho ocupa-se, então, de estudar o problema de controle estocástico ótimo contando com dinâmica linear e termos de ruídos aditivos e multiplicativos. A utilização da Programação Dinâmica constitui-se ferramenta essencial na busca da política de controle CVIU ótima. Para tal, por vias de condições sobre as funções de custo por estágio, custo terminal e parâmetros de ajuste CVIU $(\sigma_{x,u}, \bar{\sigma}_{x,u})$, pode-se caracterizar a convexidade do valor do problema de controle. Esse passo é de substancial importância na abordagem deste trabalho, pois da convexidade da função valor derivam-se as políticas ótimas de controle por realimentação em diferentes regiões do espaço de estados.

No interior de uma destas regiões, a denominada região de inação, mostra-se naturalmente pela otimalidade que a política ótima é a de não variação. Esta característica apresenta-se como a peculiaridade mais marcante da abordagem CVIU e reflete o caráter cauteloso do tomador de decisão. A concepção de controles que exercem cautela não é nova. Em diversos trabalhos no ramo da economia, encontram-se trabalhos que estudam este comportamento. Não surpreendentemente, a própria alcunha “região de inação” é tomada por empréstimo destes estudos em problemas econômicos.

Em uma segunda etapa, buscam-se soluções estacionárias para o problema de controle ótimo em um horizonte infinito de planejamento. Também, a função de custo por estágio é tomada quadrática. Neste cenário, soluções estacionárias em forma fechada são encontradas dentro da região de inação global, envolvendo a origem, e nas denominadas regiões assintóticas, consideravelmente afastadas da origem. Estas soluções dependem de funções de custo ótimo em forma quadrática e que são obtidas através das soluções de equações modificadas de Lyapunov e de Riccati. Esta, válida nas regiões assintóticas enquanto aquela, é válida na região de inação global.

Contudo, as soluções de controle na inação global e nas regiões assintóticas não cobrem todo o espaço de estados. De modo que se faz necessária a composição destas soluções com um método de aproximação subótima para o controle a ser considerado nas

regiões intermediárias que se estendem da inação global às regiões assintóticas. A solução mais simples, considerada no caso CVIU monoentrada, consiste na combinação convexa entre a lei de controle na inação e o controle assintótico. Em problemas multidimensionais no controle, adota-se um algoritmo de aprendizado que aproxima a função custo ótimo e, conseqüentemente, o controle levando em consideração as ramificações das i regiões \mathcal{R}_i^0 e as condições de contorno na inação global e nas regiões assintóticas.

Posteriormente, para fins de completude, discorre-se sobre a existência, unicidade e métodos para solução das equações algébricas de Lyapunov e Riccati que emergem do problema de controle ótimo na abordagem CVIU. Ainda, explora-se brevemente acerca da estabilidade estocástica do método CVIU proposto. Neste sentido, utiliza-se o critério de estabilidade Foster-Lyapunov para um problema de controle na forma padrão sem desconto considerando-se um sistema modificado. Nesse sentido, através da coercitividade da função valor bem como a construção de um supermartingale positivo à ela associado, mostra-se que as possíveis trajetórias dos sistemas CVIU controlados tendem, em valor esperado condicional, à origem em longo prazo. Dessa maneira, desenvolve-se um sentido de estabilidade das trajetórias.

Por fim, no intuito de ilustrar a aplicação do método desenvolvido neste trabalho, três experimentos numéricos foram propostos. O primeiro, propôs-se o controle CVIU para uma aplicação do mundo real que rege a exploração de pescada. O modelo considerado, por sua natureza complexa, não pode ser precisamente determinado e é o exemplo da aplicação que motivou o estudo dos sistemas CVIU. Este exemplo demonstra a versatilidade da abordagem CVIU que, como neste caso, pode ser aplicada a modelos determinísticos com incertezas paramétricas. Neste exemplo, a superfície de controle gerada oferece oportunidade singular para a observação do formato da região de inação.

Em uma segunda parte dos experimentos numéricos, propõe-se uma comparação entre a performance média das políticas CVIU e LQG para um sistema estocástico artificialmente criado com incerteza paramétrica. O experimento aponta para situações onde a política CVIU se mostra mais vantajosa que a gerada pelo célebre regulador LQG. Este experimento corrobora a noção de que deve-se exercer precaução na tomada de decisão para sistemas incertos. Ademais, ao promover uma varredura nos parâmetros de ajuste σ_u e $\bar{\sigma}_u$ da técnica CVIU, mostra-se o quão mais vantajosa a política CVIU pode ser em determinados cenários de incerteza.

O terceiro experimento exemplifica o caso CVIU bidimensional no controle. No caso multidimensional, e de igual modo no exemplo ao qual aqui se faz alusão, é interessante observar a relação de acoplamento que existe entre uma dada entrada do vetor de controle ótimo e o sinal das demais entradas do mesmo vetor. Dada a aproximação para o custo e controle ótimo por emprego do método das aproximações estocásticas, é igualmente interessante observar o comportamento das fronteiras das regiões \mathcal{R}_i^0 que estendem-se indefinidamente ao longo de porções das regiões intermediárias. Estas fron-

teiras também apresentam uma relação de interdependência com os sinais das entradas do vetor de controle ótimo.

No que tange a perspectivas futuras, a abordagem CVIU é um campo fértil. Inúmeras possibilidades e situações estão, até o presente momento, por serem estudadas. Dentre estas possibilidades, destacam-se as duas problemáticas a seguir.

Consiste objetivo futuro, por exemplo, estudar a solução do problema de controle ótimo para sistemas CVIU sob a ótica do critério de custo médio a longo prazo com desconto evanescente. Este objetivo se dá pelo interesse em esquivar-se da influência que o fator de desconto α tem na solução do problema de controle segundo o critério de custo com desconto abordado neste trabalho. Neste novo cenário, sem a influência do fator de desconto, uma análise da estabilidade do método apresenta maior significado prático. Sob essa perspectiva, objetiva-se investigar a existência de um critério de estabilidade estocástica que seja mais forte. Seria de grande interesse, por exemplo, desenvolver uma noção de estabilidade que se equipare em alguma medida à noção de recorrência, em tempo finito, a qualquer conjunto compacto do \mathbb{R}^n .

Outro problema que se coloca é o de abordar o caso para o qual o risco incorrido pela incerteza do problema é assimétrico. Mais especificamente, a título de ilustração, considere problemas em finanças onde um certo investidor é adverso à escassez, entretanto, situações de abundância não representam ameaça. Para tratar essa classe de problemas, uma proposição que pode ser considerada é a de substituir a função magnitude (módulo) na dinâmica CVIU por um outro funcional de magnitude (necessariamente não diferenciável em um ponto)² com fins de descrever aversões assimétricas do tomador de decisão.

² Recorde que a inação surge justamente da não diferenciabilidade da função módulo na origem.

Referências

- ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. *Linear Optimal Control*. [S.l.]: Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1971. Citado na página 37.
- ARAUJO, R. P.; MCELWAIN, D. S. A history of the study of solid tumour growth: the contribution of mathematical modelling. *Bulletin of mathematical biology*, Springer, v. 66, n. 5, p. 1039, 2004. Citado na página 17.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Adaptive Control*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- BAZANELLA, A. S.; CAMPESTRINI, L.; ECKHARD, D. *Data-Driven Controller Design: The H2 Approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 18.
- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado na página 25.
- BERGER, J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 16.
- BERTSEKAS, D.; TSITSIKLIS, J. *Neuro-Dynamic Programming*. [S.l.]: Athena scientific Belmont, MA, 1996. ISBN 1-886529-10-8. Citado na página 18.
- BERTSIMAS, D.; BROWN, D. B.; CARAMANIS, C. Theory and applications of robust optimization. *SIAM review*, SIAM, v. 53, n. 3, p. 464–501, 2011. Citado na página 16.
- BLINDER, A. S. *Central Banking in Theory and Practice*. [S.l.]: MIT press, 1999. Citado na página 20.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0 521 83378 7. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- BRAINARD, W. C. Uncertainty and the effectiveness of policy. *The American Economic Review*, JSTOR, v. 57, n. 2, p. 411–425, 1967. Citado na página 20.
- CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. [S.l.]: SIAM, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- COSTA, O.; DUFOUR, F. A sufficient condition for the existence of an invariant probability measure for markov processes. *Journal of applied probability*, Cambridge University Press, v. 42, n. 3, p. 873–878, 2005. Citado na página 57.
- DAVIS, M. *Stochastic Modelling and Control*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 37.
- EINSTEIN, A. Geometry and experience. lecture before the prussian academy of sciences, January 27, 1921. *Seelig, C.(Ed.)*, 1954. Citado na página 16.

- FASANO, A.; BERTUZZI, A.; GANDOLFI, A. Mathematical modelling of tumour growth and treatment. *Complex systems in biomedicine*, Springer, p. 71–108, 2006. Citado na página 17.
- FLIESS, M.; JOIN, C. Model-free control. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 86, n. 12, p. 2228–2252, 2013. Citado na página 18.
- FREILING, G.; HOCHHAUS, A. Properties of the solutions of rational matrix difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 45, n. 6-9, p. 1137–1154, 2003. Citado 6 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 33 e 53.
- GHAOUI, L. E. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 223–228, 1995. Citado na página 35.
- GIANNONI, M. P. Does model uncertainty justify caution? Robust optimal monetary policy in a forward-looking model. *Macroeconomic Dynamics*, Cambridge University Press, v. 6, n. 1, p. 111–144, 2002. Citado na página 20.
- HAGEN, S. T.; KRÖSE, B. Linear quadratic regulation using reinforcement learning. Citeseer, 1998. Citado na página 18.
- HEYMAN, D. P.; SOBEL, M. J. *Stochastic Models in Operations Research: Stochastic Optimization*. [S.l.]: Courier Corporation, 1982. Citado na página 16.
- HINRICHSSEN, D.; PRITCHARD, A. J. Stability radii of systems with stochastic uncertainty and their optimization by output feedback. *SIAM journal on control and optimization*, SIAM, v. 34, n. 6, p. 1972–1998, 1996. Citado na página 35.
- JULIUS, A. A.; HALÁSZ, Á.; SAKAR, M. S.; RUBIN, H.; KUMAR, V.; PAPPAS, G. J. Stochastic modeling and control of biological systems: the lactose regulation system of escherichia coli. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 53, n. Special Issue, p. 51–65, 2008. Citado na página 17.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. *Nonlinear Systems*. [S.l.: s.n.], 2002. Citado na página 18.
- LADINO, L. M.; MAMMANA, C.; MICHETTI, E.; VALVERDE, J. C. Discrete time population dynamics of a two-stage species with recruitment and capture. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 85, p. 143–150, 2016. Citado na página 60.
- LAMNABHI-LAGARRIGUE, F.; ANNASWAMY, A.; ENGELL, S.; ISAKSSON, A.; KHARGONEKAR, P.; MURRAY, R. M.; NIJMEIJER, H.; SAMAD, T.; TILBURY, D.; HOF, P. Van den. Systems & control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, 2017. Citado na página 16.
- LAVALLE, S. M. *Planning Algorithms*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. Citado na página 16.
- MEYER, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. [S.l.]: Siam, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.

- MEYN, S. P.; TWEEDIE, R. L. Stability of markovian processes I: Criteria for discrete-time chains. *Advances in Applied Probability*, Cambridge University Press, v. 24, n. 3, p. 542–574, 1992. Citado na página 57.
- MÜLLER, A. Stochastic ordering of multivariate normal distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Springer, v. 53, n. 3, p. 567–575, 2001. Citado na página 39.
- NEREU, J. C. *Métodos de aproximação do controle ótimo para sistemas CVIU a tempo discreto*. Dissertação (Mestrado) — FEEC - UNICAMP, Campinas, SP, Março 2018. Citado 3 vezes nas páginas 53, 68 e 69.
- NICULESCU, C.; PERSSON, L.-E. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 46.
- NOVICK, A.; WEINER, M. Enzyme induction as an all-or-none phenomenon. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 43, n. 7, p. 553–566, 1957. Citado na página 17.
- ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis*. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 26.
- SCHIROTZKE, W. *Nonsmooth Analysis*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007. Citado na página 25.
- SI, J. *Handbook of Learning and Approximate Dynamic Programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004. Citado na página 18.
- SOUTO, R. F. *Modelagem e controle de sistemas estocásticos com dinâmica pouco conhecida*. Tese (Doutorado) — FEEC - UNICAMP, Campinas, SP, Agosto 2015. Citado na página 20.
- UGRINOVSKII, V. A. Robust \mathcal{H}_∞ control in the presence of stochastic uncertainty. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 71, n. 2, p. 219–237, 1998. Citado na página 35.
- VAL, J. B. R. do; GEROMEL, J. C.; COSTA, O. L. V. Uncoupled riccati iterations for the linear quadratic control problem of discrete-time markov jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n. 12, p. 1727–1733, Dec 1998. ISSN 0018-9286. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- VAL, J. B. R. do; SOUTO, R. F. Modeling and control of stochastic systems with poorly known dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 9, p. 4467–4482, Sept 2017. ISSN 0018-9286. Citado na página 19.
- WATKINS, C. J. C. H. *Learning from delayed rewards*. Tese (Doutorado) — King’s College, Cambridge, May 1989. Citado na página 18.
- YOSHIDA, W.; ISHII, S. Resolution of uncertainty in prefrontal cortex. *Neuron*, Elsevier, v. 50, n. 5, p. 781–789, 2006. Citado na página 16.

YOUCEF-TOUMI, K.; ITO, O. A time delay controller for systems with unknown dynamics. In: IEEE. *American Control Conference, 1988*. [S.l.], 1988. p. 904–913. Citado na página 18.

ZHENG, Q.; GAOL, L. Q.; GAO, Z. On stability analysis of active disturbance rejection control for nonlinear time-varying plants with unknown dynamics. In: *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 3501–3506. ISSN 0191-2216. Citado na página 18.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. *Essentials of Robust Control*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998. Citado na página 18.